

ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN TEMPORAL DE LAS PRECIPITACIONES EN PUNO UTILIZANDO LA TRANSFORMADA WAVELET

© ALVARO VILCA MIRANDA
ALIOSKA JESSICA MARTINEZ GARCIA
SERAPIO CECILIO CALCINA CUEVAS
JOSÉ OSCAR HUANCA FRIAS



ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN TEMPORAL DE LAS PRECIPITACIONES EN PUNO UTILIZANDO LA TRANSFORMADA WAVELET.

© Alvaro Vilca Miranda

Aliska Jessica Martinez Garcia

Serapio Cecilio Calcina Cuevas

José Oscar Huanca Frias

© Autores

Alvaro Vilca Miranda

<https://orcid.org/0000-0002-8591-3778>
Universidad Nacional del Altiplano – Puno – Perú

Alioska Jessica Martinez Garcia

<https://orcid.org/0000-0002-7102-9957>
Universidad Nacional del Altiplano – Puno – Perú

Serapio Cecilio Calcina Cuevas

<https://orcid.org/0000-0001-5386-7685>
Universidad Nacional de Juliaca – Puno- Perú

José Oscar Huanca Frias

<https://orcid.org/0000-0003-0638-2129>
Universidad Nacional de Juliaca - Puno- Perú

Casa Editora del Polo - CASEDELPO CIA. LTDA.
Departamento de Edición

Editado y distribuido por:

Editorial: Casa Editora del Polo
Sello Editorial: 978-9942-816
Manta, Manabí, Ecuador. 2019
Teléfono: (05) 6051775 / 0991871420
Web: www.casadelpo.com
ISBN: 978-9942-684-17-2
DOI: <https://doi.org/10.23857/978-9942-684-17-2>

© Primera edición
© Octubre - 2024
Impreso en Ecuador

Revisión, Ortografía y Redacción:

Lic. Jessica M. Mero Vélez

Diseño de Portada:

Michael J. Suárez-Espinar

Diagramación:

Ing. Edwin A. Delgado-Veliz

Director Editorial:

Lic. Henry D. Suárez Vélez

Todos los libros publicados por la Casa Editora del Polo, son sometidos previamente a un proceso de evaluación realizado por árbitros calificados.

Este es un libro digital y físico, destinado únicamente al uso personal y colectivo en trabajos académicos de investigación, docencia y difusión del Conocimiento, donde se debe brindar crédito de manera adecuada a los autores.

© Reservados todos los derechos. Queda estrictamente prohibida, sin la autorización expresa de los autores, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción parcial o total de este contenido, por cualquier medio o procedimiento. parcial o total de este contenido, por cualquier medio o procedimiento.

Comité Científico Académico

Dr. Lucio Noriero-Escalante
Universidad Autónoma de Chapingo, México

Dra. Yorkanda Masó-Dominico
Instituto Tecnológico de la Construcción, México

Dr. Juan Pedro Machado-Castillo
Universidad de Granma, Bayamo. M.N. Cuba

Dra. Fanny Miriam Sanabria-Boudri
Universidad Nacional Enrique Guzmán y Valle, Perú

Dra. Jennifer Quintero-Medina
Universidad Privada Dr. Rafael Bellosó Chacín, Venezuela

Dr. Félix Colina-Ysea
Universidad SISE. Lima, Perú

Dr. Reinaldo Velasco
Universidad Bolivariana de Venezuela, Venezuela

Dra. Lenys Piña-Ferrer
Universidad Rafael Bellosó Chacín, Maracaibo, Venezuela

Dr. José Javier Nuñez-Castillo
Universidad Cooperativa de Colombia, Santa Marta,
Colombia

Constancia de Arbitraje

La Casa Editora del Polo, hace constar que este libro proviene de una investigación realizada por los autores, siendo sometido a un arbitraje bajo el sistema de doble ciego (peer review), de contenido y forma por jurados especialistas. Además, se realizó una revisión del enfoque, paradigma y método investigativo; desde la matriz epistémica asumida por los autores, aplicándose las normas APA, Sexta Edición, proceso de anti plagio en línea Plagiarisma, garantizándose así la científicidad de la obra.

Comité Editorial

Abg. Néstor D. Suárez-Montes
Casa Editora del Polo (CASEDELPO)

Dra. Juana Cecilia-Ojeda
Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela

Dra. Maritza Berenguer-Gouarnaluses
Universidad Santiago de Cuba, Santiago de Cuba, Cuba

Dr. Víctor Reinaldo Jama-Zambrano
Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí, Ext. Chone

Contenido

PRESENTACIÓN.....	11
RESUMEN.....	12
ABSTRACT.....	13
INTRODUCCIÓN.....	14
CAPITULO I	
REVISIÓN DE LITERATURA.....	16
1.1. Series Temporales.....	17
1.2. Proceso estocástico.....	17
1.3. Wavelets	18
1.4. Filtros.....	30
1.5. Precipitación	32
1.6. Antecedentes.....	38
CAPITULO II	
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	42
2.2. Enunciado del problema.....	43
2.3. Justificación de la investigación.....	44
2.4. Objetivos	44
2.5. Hipótesis	45

CAPITULO III

MATERIALES Y MÉTODOS.....46

3.1. Lugar de estudio.....47

3.2. Población.47

3.3.Muestra.48

3.4. Método de investigación.....48

3.5. Descripción detallada de métodos por objetivos
específicos.....49

CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....56

4.1. Información de los datos Hidrológicos.57

4.2. Modelamiento en base a la transformada wavelets.....57

ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN TEMPORAL DE LAS PRECIPITACIONES EN PUNO UTILIZANDO LA TRANSFORMADA WAVELET

© ALVARO VILCA MIRANDA
ALIOSKA JESSICA MARTINEZ GARCIA
SERAPIO CECILIO CALCINA CUEVAS
JOSÉ OSCAR HUANCA FRIAS



El análisis de la distribución temporal de las precipitaciones en puno, realizado a través de la transformada wavelet, ofrece una herramienta eficaz para identificar patrones en diferentes escalas de tiempo. Los datos obtenidos mediante pluviómetros permiten aplicar esta técnica de análisis de series temporales, revelando fluctuaciones significativas a corto y largo plazo que no son fácilmente detectables con otros métodos.

La transformada wavelet destaca por su capacidad de descomponer las series de datos en componentes de distintas frecuencias, lo que facilita el estudio detallado de las precipitaciones en puno. este enfoque permite observar cómo varían las precipitaciones en diferentes periodos, proporcionando información clave para entender fenómenos climáticos como la estacionalidad o eventos extremos.

Los resultados de este análisis son fundamentales para mejorar la gestión de los recursos hídricos en la región. al conocer los patrones de precipitación, se pueden diseñar estrategias más efectivas para la planificación hídrica, la agricultura y la prevención de desastres naturales, adaptándose mejor a las condiciones climáticas cambiantes.

La aplicación del análisis de series temporales mediante la transformada Wavelet en la ciudad de Puno establece una conexión entre la teoría matemática de la transformada Wavelet y la tecnología ambiental, con el objetivo de crear una herramienta que facilite el análisis de las precipitaciones en campo. El propósito principal es desarrollar algoritmos que permitan analizar series temporales utilizando la transformada Wavelet, generando curvas de evolución temporal de los datos diarios de precipitación. Se emplea un enfoque inductivo para interpretar conceptos preliminares y desarrollar los algoritmos mediante rutinas computacionales, todo dentro del entorno de Matlab y bajo la estructura conceptual de un sistema SISO (Entrada Única, Salida Única). Los resultados demuestran que la reconstrucción de la señal a través de la transformada inversa Wavelet, utilizando diferentes combinaciones de aproximaciones y detalles, permite sintetizar una señal que se ajusta en un 98% a la original. El uso de descomposiciones multinivel, tanto para la transformada Wavelet como para la inversa, permite una comprensión clara de los principios teóricos de la transformada, sin caer en la abstracción matemática. Además, se detalla la implementación de la DWT mediante filtros pasa-alta y pasa-baja utilizando la transformada de Haar.

Palabras clave: Transformada Wavelet, Precipitación, Series de tiempo, Siso, Transformada Haar.

The application of time series analysis using the Wavelet transform in the city of Puno establishes a connection between the mathematical theory of the Wavelet transform and environmental technology, with the aim of creating a tool that facilitates the analysis of precipitation in the field. The main purpose is to develop algorithms that allow analyzing time series using the Wavelet transform, generating temporal evolution curves of daily precipitation data. An inductive approach is used to interpret preliminary concepts and develop the algorithms through computational routines, all within the Matlab environment and under the conceptual structure of a SISO (Single Entry, Single Output) system. The results demonstrate that the reconstruction of the signal through the inverse Wavelet transform, using different combinations of approximations and details, allows synthesizing a signal that conforms 98% to the original. The use of multilevel decompositions, both for the Wavelet transform and for the inverse, allows a clear understanding of the theoretical principles of the transform, without falling into mathematical abstraction. In addition, the implementation of the DWT through high-pass and low-pass filters using the Haar transform is detailed.

Keywords: Wavelet Transform, Precipitation, Time Series, Siso, Haar transform.

El estudio titulado “Análisis de la distribución temporal de las precipitaciones en Puno mediante la transformada wavelet” se enfoca en un análisis de series temporales utilizando la transformada Wavelet como herramienta matemática. Este trabajo pertenece al campo de la ingeniería y tecnología, específicamente en la línea de investigación de Ciencias y Tecnología del Ambiente, y se centra en la ingeniería de recursos hídricos.

La investigación surge debido a la necesidad de contar con un pronóstico de las descargas medias diarias en Puno, lo cual es crucial para tomar decisiones en momentos críticos. El estudio busca proponer un modelo que facilite el análisis de las variables de precipitación en series temporales. Una de las limitaciones del trabajo es la posible falta de calibración adecuada de los equipos utilizados, lo que introduce una leve variación en los datos registrados. No obstante, el modelo numérico presentado se aproxima en un 95% a los valores reales.

El marco teórico de la investigación se basa en métodos numéricos y en la implementación de la transformada Wavelet, aplicados en la ingeniería de recursos hídricos para mejorar el análisis de datos en series temporales. Se emplea un enfoque inductivo-deductivo para interpretar conceptos iniciales y desarrollar relaciones entre datos experimentales y los resultados obtenidos. La población de estudio consiste en las descargas hidrológicas medias diarias registradas por la estación meteorológica de Puno, con una muestra de datos correspondientes al periodo 2007-2011, utilizando un muestreo no probabilístico.

Los principales objetivos de la investigación son:

- Desarrollar un software que facilite el análisis de series temporales de precipitaciones en Puno.
- Aplicar la transformada Wavelet como método de solución numérica.

- Implementar rutinas computacionales para facilitar el análisis de series temporales y campos de precipitación utilizando la transformada Wavelet.

La investigación está estructurada en cuatro capítulos: el capítulo I presenta una revisión de la literatura; el capítulo II expone el problema, la justificación, los objetivos y las hipótesis; el capítulo III detalla la metodología utilizada para alcanzar los objetivos específicos; y el capítulo IV presenta los resultados y una discusión comparativa con otros estudios. Finalmente, se incluyen las conclusiones y recomendaciones.

CAPITULO I

REVISIÓN DE LITERATURA

1.1. Series Temporales

Una serie temporal se define como una secuencia de N observaciones (datos) dispuestas en orden cronológico y con intervalos equidistantes, que pueden referirse a una única característica (serie univariante o escalar) o a varias características (serie multivariante o vectorial) de una variable observada en distintos momentos. (Mauricio, 2007)

Una representación matemática común para las series temporales univariantes es: $Y_1, Y_2, \dots, Y_N; (Y_t)_{t=1}^N$; donde Y_t , representa la observación número de la serie, y N corresponde al número total de observaciones de la serie completa.

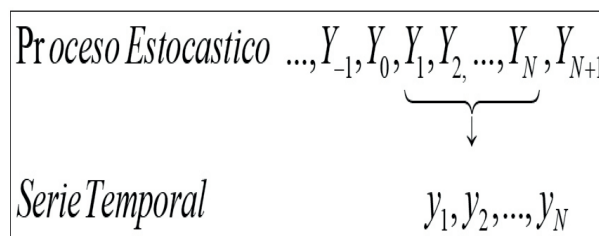
1.2. Proceso estocástico

Un proceso estocástico se describe como una serie de variables aleatorias dispuestas en orden cronológico y con intervalos equidistantes (Mauricio, 2007), que pueden corresponder a una sola característica (proceso univariante o escalar) o a múltiples características (proceso multivariante o vectorial) de una entidad observable en distintos momentos.

Una representación matemática frecuente de procesos estocásticos univariantes, es: $\dots, Y_{-1}, Y_0, Y_1, Y_2, \dots; (Y_t; t=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ donde Y_t es una variable aleatoria escalar referida a la unidad observable considerad en el momento t .

Figura 1: Proceso Estocástico y serie temporal.

Fuente: Elaboración propia.



Por otro lado (González, 2007) indica que, en el marco estadístico de los procesos estocásticos, una serie temporal, y_1, y_2, \dots, y_T , se puede interpretar como una realización muestral de un proceso estocástico que se observa únicamente para un número finito de periodos, $t = 1, 2, 3, \dots, T$.

En el análisis de series temporales, el objetivo principal es aplicar la teoría de procesos estocásticos para identificar qué proceso ha generado la serie temporal en cuestión, con el propósito de describir su comportamiento y prever su evolución futura. Para obtener métodos de predicción fiables, no se puede emplear cualquier tipo de proceso estocástico; es fundamental que su estructura probabilística se mantenga estable a lo largo del tiempo.

1.2.1. Proceso estacionario

Un proceso estocástico (Y_t) es estacionario cuando las propiedades estadísticas de cualquier secuencia finita $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}; (n \geq 1)$ de componentes (Y_t) son semejantes a las de la secuencias $Y_{t_1+h}, Y_{t_2+h}, \dots, Y_{t_n+h}; (n \geq 1)$ para cualquier número entero $(h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ tal como lo define (Mauricio 2007).

1.2.2. Proceso no estacionario

En términos de (Mauricio 2007), un proceso estocástico (Y_t) es no estacionario cuando las propiedades estadísticas de al menos una secuencia finita $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}; (n \geq 1)$ de componentes (Y_t) , son diferentes de la secuencia $Y_{t_1+h}, Y_{t_2+h}, \dots, Y_{t_n+h}; (n \geq 1)$ para al menos un número entero $(h > 0)$.

1.3. Wavelets

En ingeniería, las señales se representan en función del tiempo o de la frecuencia (Cano et al., 2015). Además, según Rubio et al. (2006), en la mayoría de las aplicaciones de procesamiento digital de señales, el contenido frecuencial es crucial, y la transformada de Fourier es probablemente la más utilizada para identificar las principales características de una señal a partir de su espectro de frecuencias.

Una wavelet es una onda de duración limitada con valor

promedio cero. A diferencia del análisis de Fourier, que emplea funciones sinusoidales, las wavelets suelen ser irregulares y asimétricas (Cortés et al., 2007).

1.3.1. Definiciones básicas

1.3.2. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es un método matemático que descompone una función en sus componentes de frecuencia, similar a cómo un prisma separa la luz en diferentes colores y longitudes de onda. La función original, definida en el dominio del tiempo $f(t)$, se transforma en una nueva función en el dominio de la frecuencia $F(w)$. Esta función transformada se conoce como la Transformada de Fourier o Serie de Fourier cuando la función es periódica. Fourier descubrió que cualquier función puede representarse como una suma de senos y cosenos de diferentes frecuencias y amplitudes, lo que permite reconstruir la función original. Aunque originalmente fue desarrollada para funciones periódicas, el método se puede extender a funciones no periódicas aumentando el período T hasta el infinito (Cortés et al., 2007).

No obstante, Rubio et al. (2006) señalan que la transformada de Fourier no es adecuada para señales complejas que requieren un análisis en el tiempo, y solo es útil para señales estacionarias. Según Misiti et al. (1997), Fourier descompone una señal en sinusoides de diversas frecuencias y permite transformar la visión de una señal en función del tiempo a una basada en la frecuencia.

Figura 2: Transformada de Fourier

Fuente: Elaboración propia



Para muchas señales, el análisis de Fourier es extremadamente útil porque el contenido de la frecuencia es de gran importancia.

Sin embargo, el análisis de Fourier presenta una desventaja importante: al transformar la señal al dominio de la frecuencia, se pierde la información temporal. Esto significa que al observar una transformada de Fourier de una señal, no es posible determinar el momento específico en que ocurrió un evento particular (Misiti et al., 1997).

1.3.3. Transformada de Wavelet

(Cortes et al., 2007) define una wavelet como una onda de duración limitada con un valor promedio cero. A diferencia del análisis de Fourier, que utiliza funciones seno y coseno que se extienden indefinidamente en el tiempo, las wavelets son generalmente irregulares y asimétricas.

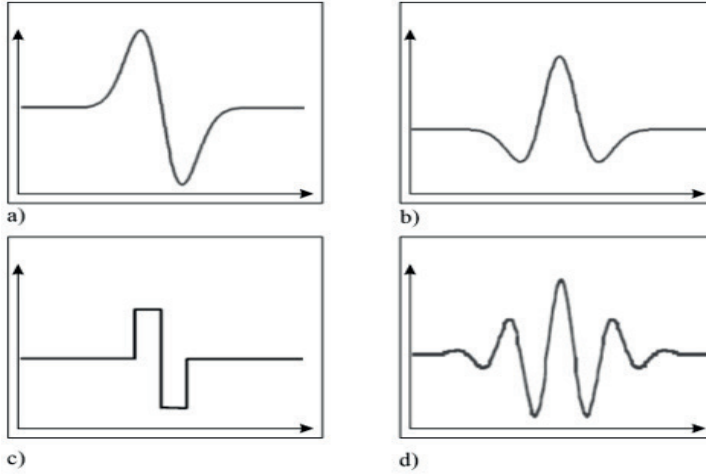
Se presenta en primer lugar la transformada wavelet continua (TWC) o simplemente transformada wavelet (TW) y a partir de ella la transformada wavelet discreta (TWD). Para ello, se denomina $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ la wavelet madre que origina, mediante traslaciones y dilataciones, una base ortonormal. Es decir, el conjunto de funciones que forman la base está definido de la siguiente manera:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

A la descomposición originada por este tipo de wavelets se lo denomina descomposición en octavas. Observemos que el entero j en la escala indica el ancho de la wavelet y el índice k da la localización en tiempo. (Castro, 2004). La figura 3, muestra algunas familias de wavelet.

Figura 3: Familias de wavelet a) Gaussiano, b) Sombrero mexicano, c) Haar , d) Morlet

Fuente: Elaboración propia.



Para que una función $\psi(t)$ sea clasificada como wavelet, debe de satisfacer lo siguiente: (Addison, 2016)

a) La función $\psi(t)$ debe de tener energía finita.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt$$

b) La función $\psi(t)$ debe de cumplir con el criterio de la constante de admisibilidad C_ψ .

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{f} df < \infty$$

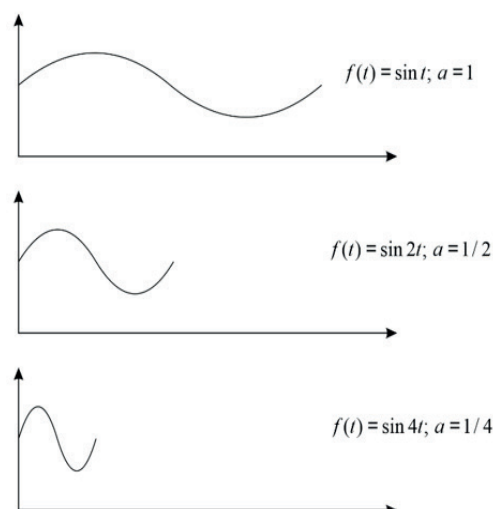
Donde f denota la frecuencia y $\hat{\psi}(t)$ es la transformada de Fourier de $\psi(t)$. La condición implica que la wavelet no tiene componente de frecuencia nula, o dicho de otra manera, la wavelet $\psi(t)$ debe de tener media 0.

1.3.3.1. Factor de escala

Para comprender claramente el concepto de escalado de ondas en este contexto, (Misiti et al., 1997) explica que escalar una wavelet implica simplemente estirla o comprimirla. Para ir más allá de términos generales como “estiramiento”, se introduce el factor de escala, frecuentemente representado por la letra a . En el caso de las sinusoides, el efecto del factor de escala puede observarse en la figura 4.

Figura 4: Factor de escala para una onda sinusoidal

Fuente: Elaboración propia

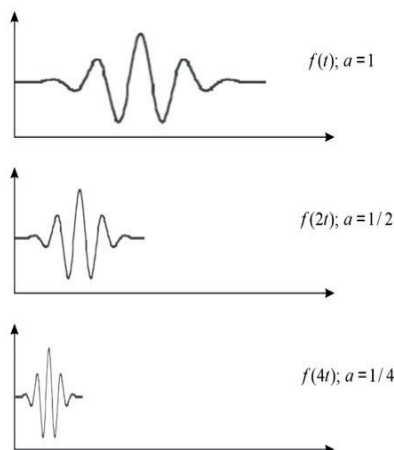


El factor de escala funciona exactamente igual con wavelets. Cuanto menor sea la escala factor, más “comprimida” la wavelet, tal como se observa en la figura 5.

Queda claro a partir de los diagramas (Figura 4 y Figura 5) que, para una onda sinusoidal, el factor de escala está relacionado de manera inversa con la frecuencia en radianes. De manera análoga, con el análisis wavelet, la escala está relacionada con la frecuencia de la señal.

Figura 5: Factor de escala en una wavelet.

Fuente: Elaboración propia.



1.3.3.2. Factor de Traslación

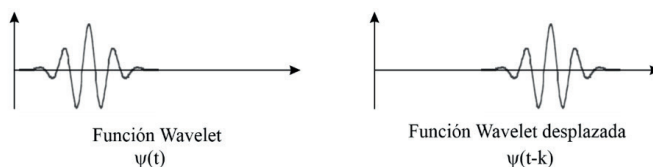
La acción del factor de traslación en una wavelet simplemente significa retrasar (o acelerar) su inicio (Misiti et al. 1997). Matemáticamente, retrasar una función $f(t)$ por un factor se representa por:

$$f(t - k)$$

En la figura 6, podemos observar el comportamiento del factor de traslación en un wavelet.

Figura 6: Factor de traslación en $\psi(t)$ wavelet.

Fuente: Elaboración propia.



1.3.3.3. Transformada wavelet continua.

El análisis mediante la transformada Wavelet se realiza en base a la función $\psi(t)$ denominada wavelet madre, dicha función tiene media cero y decae bruscamente de manera oscilatoria.

Finalmente, los datos se representan a través de la superposición de versiones escaladas y trasladadas de la wavelet madre dada. Matemáticamente la transformada continua Wavelet de una señal $S(t)$ con relación a la wavelet madre $\psi(t)$ se expresa como:

$$TWC(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Donde a es el factor de escala y b el factor de traslación.

Como ejemplo, considere que el factor de escala de un wavelet es igual a 2^{-j} , lo cual nos indica que a medida que crece j , el factor de la escala disminuye y por lo tanto existe una “contracción” en el tiempo, las oscilaciones aumentan y la wavelet exhibe una “alta frecuencia”. Por el contrario, si j disminuye (aumenta la escala y se amplía la tiempo), las oscilaciones se vuelven más lentas, es decir, tienen un comportamiento de “baja frecuencia”. Esto es una característica sobresaliente de wavelets de alta frecuencia se analizan en intervalos de tiempo cortos, mientras que los componentes de baja frecuencia se analizan a largos intervalos de tiempo. (Rocha y Alves, 2004).

El análisis de wavelet genera una serie de constantes, los cuales indican la similitud de la señal a analizar y la función madre. Puesto que la TWC es considerado un proceso reversible, la señal se puede reconstruir a partir de los coeficientes obtenidos durante el análisis. Dicho proceso se puede representar por:

$$SS(T) = \frac{1}{C} \int_{\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} TWC(a,b) \psi(t) \frac{da db}{a^2}$$

1.3.3.4. Transformada wavelet discreta.

Dado que la Transformada Wavelet Continua (TWC) implica expandir y desplazar la wavelet madre continuamente, se produce una gran cantidad de información redundante. Para evitar esto, se puede usar un enfoque más eficiente al expandir y trasladar la

wavelet madre utilizando escalas y posiciones específicas basadas en potencias de 2 (es decir, escalas y posiciones diádicas). Este método es mucho más eficiente que la TWC y se denomina Transformada Wavelet Discreta (TWD), definida como:

$$TWD(j,k) = \frac{1}{\sqrt{a_0^j}} \sum_n S(k) \psi\left(\frac{K - kb_0 a_0^j}{a_0^j}\right)$$

Los parámetros a y b son funciones del parámetro entero j , es decir, $a = a_0^j$ y $b = kb_0 a_0^j$, de manera análoga k es una variable entera que se refiere a una muestra dada en la señal de entrada. (Rocha y Alves, 2004)

1.3.3.5. Transformada wavelet discreta en una dimensión

En el análisis wavelet para señales discretas se utiliza una familia wavelet ortonormal, la cual está dada por la ecuación (1.1).

Para analizar el dominio de datos en diferentes resoluciones, la wavelet madre $\psi(t)$, se utiliza en la función de escalamiento $\phi(t)$, la cual se define como: (Mallat, 1999)

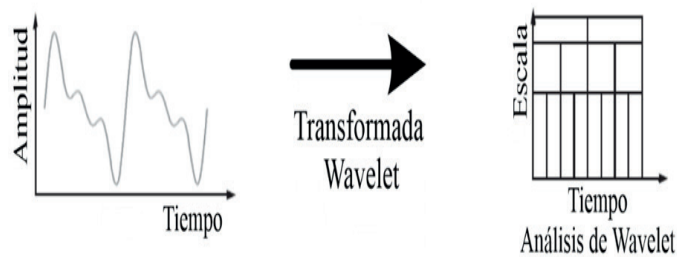
$$\phi(t) = \sum_{k=-1}^{N-2} (-1)^k c_{k+1} \psi(2t + k)$$

Donde C_k son los denominados coeficientes wavelet.

1.3.4. Análisis de Wavelet

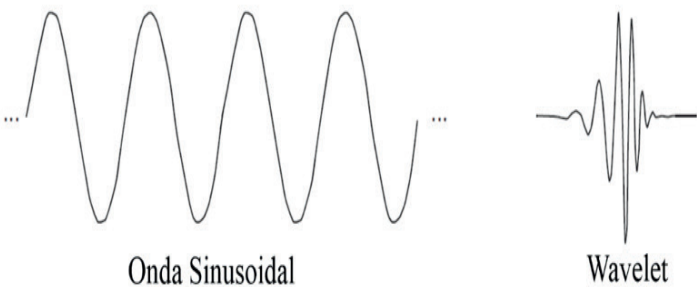
El análisis de un conjunto de datos estocásticos mediante wavelets es el siguiente paso lógico, ya que utiliza una técnica de ventanas con tamaños de región variables (Misiti et al., 1997). La técnica de wavelets permite emplear intervalos de tiempo más largos para obtener información precisa de baja frecuencia y regiones más cortas para captar información de alta frecuencia.

Figura 7: Transformada de Wavelet.
Fuente: Elaboración propia.



Al comparar las wavelets con las ondas sinusoidales, que son la base del análisis de Fourier, se observa que las sinusoides no tienen una duración limitada, ya que se extienden desde menos infinito hasta más infinito. Mientras que las sinusoides son suaves y predecibles, las wavelets tienden a ser irregulares y asimétricas (Misiti et al., 1997).

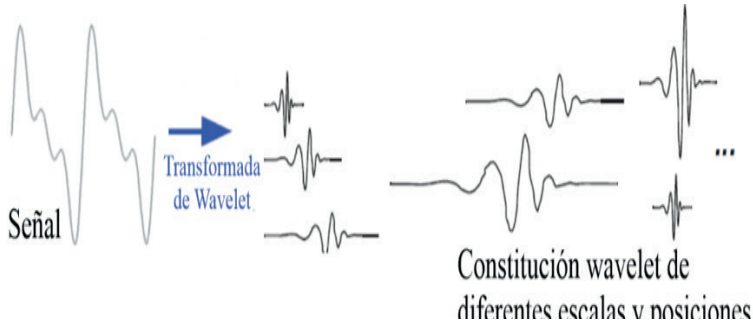
Figura 8: Onda sinusoidal y ondículas
Fuente: Elaboración propia.



A partir del párrafo anterior, se puede concluir que el análisis de Fourier implica descomponer una señal en ondas sinusoidales de diferentes frecuencias. De manera similar, el análisis de wavelet descompone una señal en wavelets que han sido modificadas en escala y posición a partir de la wavelet original (o madre).

Figura 9: Constitución de ondas mediante la transformada Wavelets.

Fuente: Elaboración propia.

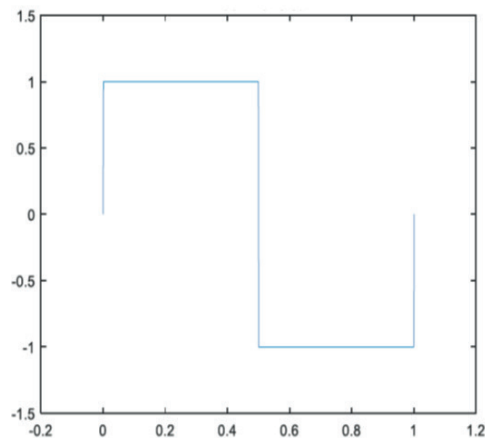


1.3.5. Wavelet Haar:

La transformada Haar, propuesta por Alfred Haar en 1909, es la primera y más básica de las wavelets ortogonales (Bhardwaj et al., 2009). Se caracteriza por su estructura simple de onda cuadrada, como se muestra en la Figura 10, y está asociada con una función de escala correspondiente.

Figura 10: Wavelet Haar.

Fuente: Elaboración propia



Matemáticamente (Abdulmunem e Ibrahim, 2016) define la función Haar , como:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \in [0; 1/2] \\ -1 & \text{para } t \in [1/2; 1] \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

1.3.6. Modelamiento en base a la transformada wavelet.

El cálculo de los coeficientes wavelets para cada escala requiere un considerable esfuerzo computacional, lo que resulta en una gran cantidad de datos. Para llevar a cabo este análisis computacional, se utiliza la transformada wavelet discreta (TWD), que se implementa mediante filtros (Mallat, 1999).

El algoritmo de Mallat es un esquema clásico que emplea un codificador de subbandas de dos canales, y este algoritmo se traduce en una TWD.

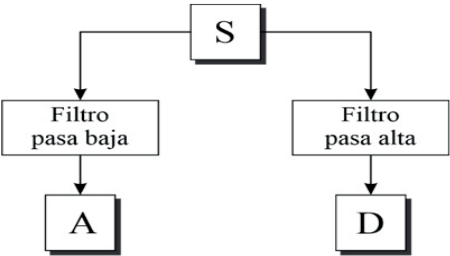
1.3.7. Proceso de filtrado

El codificador de subbandas utiliza dos tipos de filtrado: el contenido de baja frecuencia, que es fundamental ya que define la identidad de la señal original, y el contenido de alta frecuencia, que añade un matiz especial a la señal. En el contexto del análisis de wavelets, es común referirse a aproximaciones y detalles.

Las aproximaciones corresponden a los componentes de baja frecuencia (alta escala), mientras que los detalles se refieren a los componentes de alta frecuencia (baja escala) (Misiti et al., 1997).

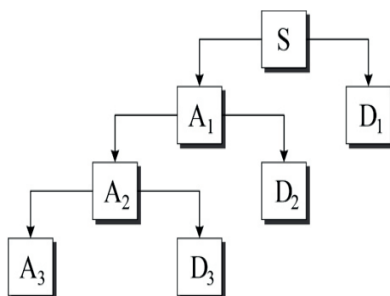
El proceso de filtrado se reduce al siguiente esquema:

Figura 11: Esquema del Proceso de filtrado de la señal.
Fuente: Elaboración propia.



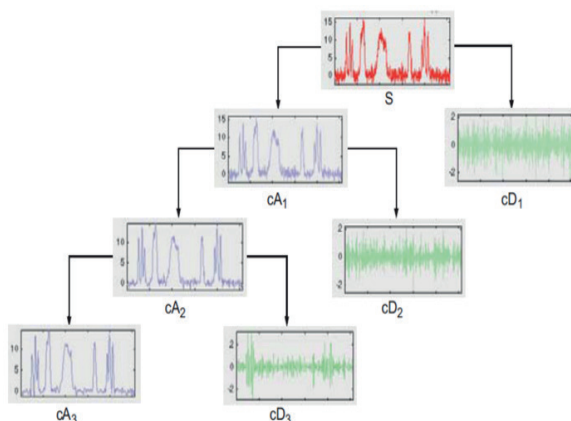
El esquema ilustra cómo la señal original “S” se procesa a través de dos filtros (uno pasa-alta y otro pasa-baja), generando dos señales denominadas aproximación (A) y detalle (D). Este procedimiento se aplica de manera iterativa a la señal (codificación de subbandas) para lograr una mayor descomposición de la señal original. Este proceso se puede representar en el siguiente esquema: (Misiti et al., 1997)

Figura 12: Proceso de la descomposición de la señal por niveles
Fuente: Misiti et al., 1997



Luego de descomponer de forma iterativa mediante la TWD, continúa el proceso de reconstrucción de la señal (síntesis de la señal) para lo cual se hace uso de la transformada discreta inversa wavelet (TWDI).

Figura 13: Proceso de la reconstrucción de la señal.
Fuente: Elaboración propia.



1.4. Filtros

Los filtros juegan un papel crucial en el análisis mediante wavelets, ya que se utilizan para descomponer la señal en varios niveles antes de proceder con su reconstrucción. El término filtro se define como cualquier sistema que discrimina o modifica lo que pasa a través de él según ciertos atributos de la entrada (Martínez et al., 2010). Por otro lado, Meyer (2007) define un filtro como un dispositivo que selecciona frecuencias, es decir, que “deja pasar” señales en determinadas bandas de frecuencia y “bloquea o discrimina” señales en otras bandas. Esta última definición es la que más se ajusta al propósito de la investigación.

1.4.1. Clasificación de filtros

Los filtros se pueden clasificar en: analógicos, digitales y por frecuencia de corte. Y (Sadiku, 2006) los define como sigue:

1.4.1.1. Los filtros analógicos

Se utilizan circuitos electrónicos con componentes discretos, como resistencias, condensadores y amplificadores operacionales, entre otros, que son necesarios para lograr el filtrado deseado.

1.4.1.2. El filtro digital

Se utiliza un procesador digital para realizar operaciones matemáticas en los valores muestreados de la señal. Este procesador puede ser un dispositivo de propósito general, como una computadora de escritorio, un chip DSP® (Procesador Digital de Señales) o una FPGA programable.

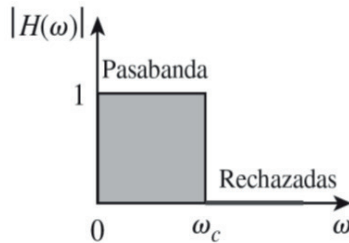
1.4.1.3. Los filtros por frecuencia de corte

Entre este grupo de filtros, se incluyen aquellos que son adecuados para el trabajo de investigación. Los más comunes se pueden clasificar en cuatro categorías, basadas en la forma de sus curvas:

a) Filtro pasa-bajas: deja pasar las frecuencias bajas y detiene las frecuencias elevadas.

Figura 14: Respuesta en frecuencia ideal filtro pasa baja.

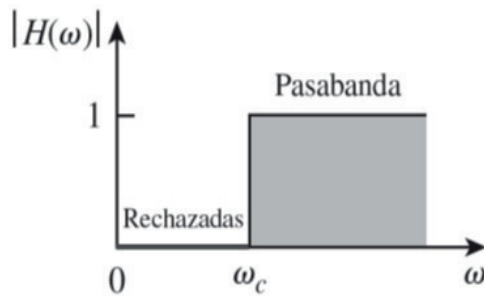
Fuente: Sadiku, 2006



b) Filtro pasa-altas: deja pasar altas frecuencias y rechaza las frecuencias bajas.

Figura 15: Respuesta en frecuencia ideal filtro pasa alta.

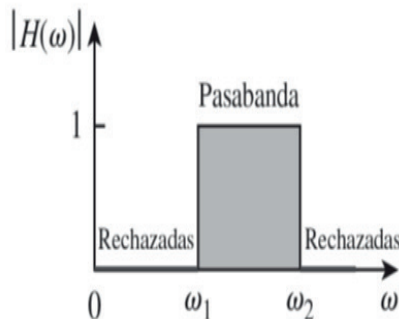
Fuente: Sadiku, 2006



c) Filtro pasa-banda: deja pasar frecuencias dentro de una banda de frecuencia y bloquea o atenúa las frecuencias fuera de la banda.

Figura 16: Respuesta en frecuencia ideal filtro pasa banda.

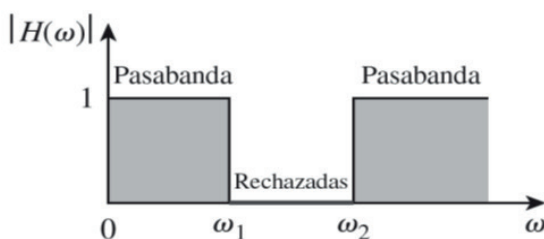
Fuente: Sadiku, 2006



d) Filtro rechaza-banda: deja pasar frecuencias fuera de una banda de frecuencia y bloquea o atenúa frecuencias dentro de la banda.

Figura 17: Respuesta en frecuencia ideal filtro rechaza banda.

Fuente: Sadiku, 2006



1.5. Precipitación

Según (Segeer et al., 2006), la precipitación se define como todas las aguas meteóricas que llegan a la superficie terrestre, ya sea en forma líquida o sólida. Por su parte, (Chereque, 1989) y (Bateman, 2007) la describen como cualquier forma de humedad que, originada en las nubes, alcanza la superficie de la Tierra. De acuerdo con ambas definiciones, las lluvias, granizadas, garúas y nevadas son distintas manifestaciones del mismo fenómeno de precipitación.

1.5.1. Formación de las precipitaciones

Los elementos necesarios para la formación de las precipitaciones considerados por (Bateman, 2007) son:

- Humedad atmosférica.
- Radiación solar.
- Mecanismos de enfriamiento del aire
- Presencia de núcleos higroscópicos para que haya condensación.

Debido al calentamiento cercano a la superficie, causado por diferencias en la radiación, las masas de aire ascienden hasta alturas donde se enfrían lo suficiente para alcanzar la saturación.

Cuando el aire está saturado o casi saturado, se forman neblina, gotas de agua o cristales de hielo, siempre y cuando estén presentes núcleos de condensación (para las gotas de agua y la neblina) o núcleos de congelamiento (para los cristales de hielo). Los núcleos de condensación están formados por productos de combustión (como óxidos de nitrógeno y pequeñas partículas de sal), mientras que los núcleos de congelamiento están compuestos por minerales arcillosos (Chereque, 1989).

Después de la nucleación, se generan diminutas gotas con un diámetro promedio de aproximadamente 0.02 mm. Las gotas de lluvia, por otro lado, tienen un diámetro medio de alrededor de 2 mm. Este gran incremento en el tamaño se debe a la unión de numerosas pequeñas gotas, y esta unión se explica por:

- La atracción electrostática entre las gotitas que conforman las nubes
- Las microturbulencias dentro de la masa de la nube
- El barrido de las gotitas más finas por las gotas mayores
- La diferencia de temperaturas: las gotas más frías se engrosan a expensas de las más calientes.

Los párrafos anteriores describen cómo se forman las gotas de lluvia dentro de la nube, pero esto no implica que todas las gotas formadas llegarán a la superficie terrestre. En otras palabras, el volumen de agua en la nube no es necesariamente igual al volumen de agua que finalmente cae como lluvia. Esto se debe a un suministro constante de vapor de agua desde los alrededores, y este proceso ocurre principalmente:

- Cuando existe una turbulencia dentro de la nube que provoca y facilita la renovación del vapor de agua
- Cuando hay movimiento del aire húmedo desde las partes bajas, es decir un movimiento vertical ascendente.

1.5.2. Tipos de Precipitación

1.5.2.1. Por ascenso de masa húmeda

Las precipitaciones se pueden clasificar según (Segeber et al., 2006) y (Chereque, 1989) en los siguientes tres grupos:

a) Precipitaciones convectivas: Estas precipitaciones son causadas por el ascenso de aire cálido, que es más ligero que el aire frío circundante. Las diferencias de temperatura suelen resultar del calentamiento desigual en la superficie o en la capa superior del aire. Un rasgo distintivo de este tipo de precipitación es la presencia de nubes de tipo cumuliforme, que dan lugar a precipitaciones en forma de chubascos o tormentas, generalmente localizadas.

b) Precipitaciones orográficas: Estas precipitaciones ocurren cuando el aire cálido asciende hacia una cadena montañosa, o es forzado a hacerlo por la montaña. Las precipitaciones, que pueden ser en forma de lluvia o nieve, tienden a ser muy irregulares tanto en intensidad como en ubicación. Además, la precipitación es más intensa en la zona de barlovento, disminuyendo rápidamente en la región de sotavento.

c) Precipitaciones ciclónicas: Estas precipitaciones ocurren cuando nubes de diferentes temperaturas se encuentran; las nubes más cálidas son elevadas a alturas mayores donde se produce la precipitación. En la práctica, los efectos de estos tres tipos de enfriamiento están interrelacionados, y la precipitación resultante no puede clasificarse como un solo tipo.

1.5.2.2. Por la forma en que cae

Por la forma en que cae (tipos de hidrometeoros), (Segeber y Villodas 2006) indica que se pueden distinguir diversos tipos de precipitación entre los cuales se tienen:

a) Lluvia: Se define como la precipitación atmosférica en forma de gotas de agua líquida, que generalmente tienen un diámetro igual o superior a medio milímetro y caen a una velocidad mayor a dos metros por segundo. Se pueden distinguir:

Ligera: Tasa de caída de hasta 2,5 mm/h

Moderada : Tasa de caída desde 2,5 hasta 7,5 mm/h

Fuerte: Tasa de caída mayor a 7,5 mm/h

b) Llovizna: Se trata de una precipitación similar a la lluvia, pero con gotas de diámetro menor a medio milímetro. Estas gotas están uniformemente distribuidas y son muy numerosas, dando la impresión de flotar en el aire. Proviene de estratos bajos y, en ocasiones, pueden formar niebla.

c) Chaparrón o aguacero: Estas precipitaciones, ya sean líquidas o sólidas, se caracterizan por una intensidad extrema, comienzan y terminan de manera abrupta, y tienen una duración relativamente breve.

d) Nieve: Se define como una precipitación atmosférica compuesta por agrupaciones de cristales de hielo con forma de estrellas hexagonales. A veces, estos cristales se agrupan para formar copos de nieve que pueden alcanzar varios centímetros de diámetro. Este fenómeno ocurre cuando los cristales se unen mediante una capa de agua líquida que los rodea, y el proceso tiene lugar cuando la temperatura es superior a -10°C .

e) Agua nieve: Se considera así a la precipitación de nieve en fusión, puede caer sola o con lluvia.

f) Neviza: Es una nieve que presenta una textura granular y compacta, generada por cambios en la temperatura. Este tipo de nieve es una etapa intermedia en el proceso de transformación hacia el hielo glaciar.

g) Rocío: Son gotas de agua formadas por la condensación directa del vapor en el aire cercano a superficies que se han enfriado debido a la radiación nocturna.

h) Escarcha: Son pequeños cristales de hielo que adoptan formas de escamas o agujas. Se forman por la condensación del vapor de agua en el aire y se convierten directamente en estado sólido sobre superficies muy frías durante la noche.

i) Granizo: Es una precipitación de granos de hielo traslúcidos

que se origina en nubes convectivas, generalmente del tipo cumulonimbus. Aunque suelen tener forma esférica, también pueden ser cónicos o irregulares. Estos granos están formados por un núcleo de granizo blando, cubierto por una fina capa de hielo que les da un aspecto cristalino.

1.5.3. Medición Pluviométricas

La lluvia se puede medir en términos de altura de agua, ya que implica la cuantificación del volumen de agua por unidad de superficie. También se puede considerar como la cantidad de agua acumulada en milímetros (mm) sobre una superficie determinada en metros cuadrados (m^2) (Bateman, 2007). Por esta razón, en las medidas pluviométricas se utiliza la unidad de milímetros de agua.

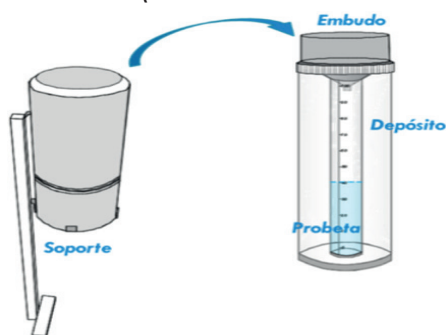
1.5.4. Aparatos de medida de precipitación

Los aparatos de uso para la medida de precipitación son los que se consideran por (Chereque, 1989), y se detallan como sigue:

1.5.4.1. Pluviómetros simples

Según (Chereque, 1989), cualquier recipiente abierto con paredes verticales puede funcionar como pluviómetro, ya que el objetivo principal es recolectar el agua de lluvia para su medición. En el sistema métrico, la medición se realiza en milímetros y décimos de milímetro. No obstante, es crucial que las dimensiones de estos instrumentos estén estandarizadas para poder comparar las mediciones tomadas en distintas localidades.

Figura 18: Pluviómetro simple
Fuente: (Parodi O. et al. 2022)



1.5.4.2. Pluviómetros registradores (pluviógrafo)

Los pluviómetros simples solo registran la cantidad total de lluvia caída, pero no proporcionan información sobre la intensidad de la precipitación a lo largo del tiempo. Para obtener esta información, se utilizan pluviógrafos. Un pluviógrafo funciona con un embudo que recoge el agua de lluvia y la dirige a un depósito con dos compartimientos oscilantes alrededor de un pivote. El movimiento oscilante del depósito se transfiere a una aguja que marca su trayectoria en un papel enrollado sobre un tambor que gira gracias a un mecanismo de relojería. El gráfico resultante se denomina pluviograma (Parodi O. et al. 2022).

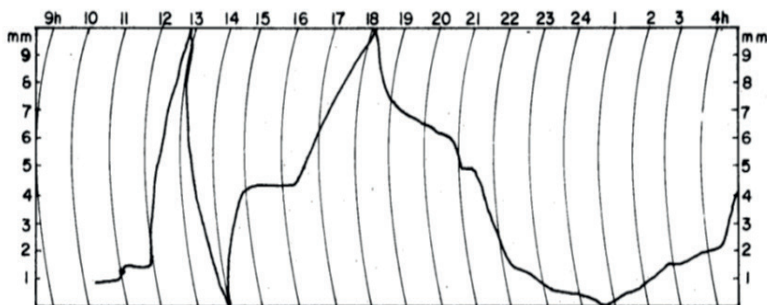
Figura 19: Pluviómetro registrador:

Fuente: Parodi et al., 2022



Figura 20: Pluviograma:

Fuente: Chereque, 1989



1.5.4.3. Pluviómetros totalizadores

Estos pluviómetros se emplean cuando se requiere conocer la pluviometría mensual o estacional en áreas de difícil acceso, a las cuales solo se puede llegar unas pocas veces al año. Para proteger el agua de la congelación, se utiliza cloruro de calcio u otro anticongelante, y para evitar la evaporación, se añade una capa de aceite (Fernández, 2009).

Figura 21: Pluviómetro totalizador.

Fuente: Fernández, 2009



1.6. Antecedentes

En la revisión bibliográfica local no se han encontrado estudios similares a la investigación propuesta; sin embargo, existen trabajos que abordan teorías e investigaciones relacionadas.

En el ámbito de la aplicación matemática al procesamiento de señales, la teoría de Wavelets es relativamente nueva, especialmente en su aplicación a la física y al análisis numérico. Las transformadas wavelets permiten aproximar señales con distintos niveles de resolución y escala, lo que posibilita una aproximación precisa de muchas funciones mediante un número reducido de coeficientes wavelet, convirtiéndose en una herramienta para filtrar componentes de alta frecuencia en los datos (Mallat, 1999; Misiti et al., 1997).

Las wavelets son funciones especiales que representan pequeñas ondas y se emplean para la representación y aproximación de datos discontinuos. Permiten el análisis de funciones a diferentes escalas y resoluciones. El análisis con wavelets consiste en utilizar una función base, conocida como wavelet madre, y realizar traslaciones y dilataciones de esta función. La señal original se representa como una combinación lineal de la función base y sus versiones trasladadas (Chui y Heil, 1992; Kuisor, 1994; Mayer, 1993). La teoría de wavelets proporciona una herramienta conceptual y computacional valiosa para la caracterización e interpretación de señales, así como para el análisis de series temporales en el contexto de precipitaciones y procesamiento de datos en sistemas espacio-temporales (Zarantonello, 1997).

1.6.1. Investigaciones en el Internacionales:

Rodríguez y Llasat (1997) llevaron a cabo un estudio titulado “Análisis temporal y espectral de la serie de precipitación mensual de Barcelona (España) 1850-1991”. En su investigación, aplicaron una metodología que considera la serie meteorológica como una señal compuesta por la superposición de componentes deterministas y aleatorios. El objetivo principal fue realizar un análisis temporal y espectral de las series históricas de precipitación para identificar posibles periodicidades o cambios temporales desde el inicio de la serie.

Ortiz (2016) realizó el estudio “Caracterización del campo de precipitación sobre la microcuenca urbana del campus Universidad Nacional de Colombia - sede Bogotá”. En esta investigación se analizaron las características del ciclo diurno, intra-anual e inter-anual de la precipitación en una microcuenca urbana, utilizando registros históricos de precipitación de la red pluviométrica del campus de la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, correspondientes a los años 2007 a 2011.

Mancero y Ochoa (2015) llevaron a cabo la investigación “Análisis de Fourier y Wavelet de Las Series de Tiempo de la Estación Meteorológica ESPOL-FIMCBOR”. Este artículo

documenta la aplicación de métodos de análisis basados en la transformada de Fourier y Wavelet a series temporales de datos históricos de temperatura, humedad relativa, presión atmosférica, precipitación y velocidad del viento, recolectados en la estación meteorológica ESPOL-FIMCBOR. El estudio destaca las limitaciones de la transformada de Fourier, que se basa en funciones sinusoidales permanentes, mientras explora las ventajas de la transformada wavelet.

El trabajo "Time-frequency methods based on the wavelet transform" presenta las aportaciones de la transformada wavelet al análisis tiempo-frecuencia, así como los métodos que permiten realizar un análisis multirresolución dentro de un esquema único. Este enfoque permite implementar estrategias flexibles adaptadas a las características específicas de la señal (Serrano et al., 2012).

1.6.2. Investigaciones nacionales:

Yarlequé et al. (2007) llevaron a cabo la investigación titulada "Reconstrucción de datos de precipitación pluvial en series de tiempo mediante transformadas wavelet con dos niveles de descomposición". Este estudio se centra en la estimación retrospectiva de la precipitación utilizando valores del índice de vegetación conocido como NDVI (Normalized Difference Vegetation Index), bajo la premisa de que ambas señales son periódicas y proporcionales. Se presenta un modelo de reconstrucción de precipitación basado en la técnica de Transformada Wavelet, que procesa los datos de NDVI junto con el ruido característico de la señal de precipitación. El modelo permite obtener una reconstrucción de los datos de lluvia a la misma resolución temporal (diaria) mediante un procesamiento en dos niveles de descomposición. La validación del modelo se realizó mediante el cálculo del coeficiente de determinación lineal (R^2), obteniéndose un valor de $R^2 > 0.70$ entre los valores medidos y los reconstruidos, superando los resultados obtenidos en reconstrucciones anuales y mensuales descritas en publicaciones previas.

Carbajal et al. (2010) realizaron el estudio “Reconstrucción de datos faltantes de precipitación pluvial diaria mediante la Transformada Wavelet”. Esta investigación propone un nuevo método para completar datos faltantes de lluvia diaria basado en la transformada Wavelet (TW). El método de reconstrucción de precipitación diaria utilizando TW fue desarrollado y validado por Yarlequé et al. (2007). Las pruebas para reconstruir datos climáticos se llevaron a cabo con información de seis estaciones en el Altiplano peruano, en la provincia de Puno. La “reconstrucción” se define como el proceso de obtener una nueva señal para llenar los datos ausentes en la serie real. La validación cruzada de esta técnica se realizó con las mismas seis estaciones y se comparó con los resultados obtenidos utilizando el generador de datos climáticos ClimGen (Nelson, 2002).

CAPITULO II

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Formulación del problema

En los últimos años, la gestión y aprovechamiento del recurso hídrico han sido inadecuados. En cualquier estudio hidrológico, ya sea para fines de irrigación, generación de energía, consumo, etc., es crucial conocer la disponibilidad de este recurso vital, ya que su adecuada gestión es beneficiosa para la población. Los eventos hidrológicos naturales, como aguaceros, caudales y niveles de embalses, se consideran eventos estocásticos. Esto se debe a que, aunque presentan un patrón medio de comportamiento a largo plazo, la predicción de sus magnitudes en un momento dado conlleva un grado variable de incertidumbre. El patrón medio representa la componente determinística, mientras que la incertidumbre corresponde a la componente aleatoria.

El objetivo de la investigación se centra en la modelación de la precipitación en un punto geográfico específico, con un enfoque en aplicaciones relacionadas con la gestión de recursos hídricos. Para llevar a cabo una caracterización eficiente, la señal original

se procesa utilizando dos filtros: uno pasa alto y otro pasa bajo. Este proceso da lugar a dos señales denominadas aproximación (

A) y detalle (

D). El procedimiento de filtrado se traduce en una Transformada Rápida Wavelet. Posteriormente, se reconstruye la señal sin pérdida de información mediante la Transformada Discreta Wavelet Inversa.

2.2. Enunciado del problema

2.2.1. Problema general

¿Es factible crear un software que simplifique el análisis de series temporales mediante la transformada Wavelet?

2.2.2. Problemas específicos

¿Es factible desarrollar un software computacional para describir el comportamiento de datos en series temporales utilizando la

transformada Wavelet?

¿Es posible aplicar las bases teóricas de la transformada Wavelet de manera práctica y precisa?

2.3. Justificación de la investigación

Conocer las tendencias de variables como la precipitación y el caudal en las últimas décadas es crucial para determinar la disponibilidad de agua superficial. Esta investigación se lleva a cabo porque la distribución, conservación y eficiencia en el uso del recurso hídrico son aspectos fundamentales para el consumo, la agricultura y otros sectores del país. Además, instituciones como el SENAMHI necesitan modelos adecuados para predecir las descargas medias diarias en el Lago Titicaca, un recurso vital para el bienestar de la población.

La preocupación de las autoridades de la provincia de Puno es obtener pronósticos precisos de las descargas medias diarias en el Lago Titicaca para tomar decisiones en momentos críticos. Este estudio busca ofrecer un modelo basado en la Transformada de Wavelet que facilite el análisis de series de tiempo de las variables de precipitación y caudal.

Los resultados de esta investigación serán útiles para las autoridades y para el SENAMHI, ya que les permitirán prever la disponibilidad y demanda futura del recurso hídrico, beneficiando así a los habitantes de la región altiplánica en aspectos como el consumo humano, la ganadería, la agricultura y la prevención de desastres naturales.

2.4. Objetivos

2.4.1. Objetivo general

Crear un modelo matemático que simplifique el análisis de series temporales de las precipitaciones en la ciudad de Puno.

2.4.2. Objetivos específicos

Utilizar la Transformada Wavelet como un método numérico

para facilitar el análisis de series temporales.

Desarrollar rutinas computacionales que optimicen el análisis de la Transformada Wavelet en series temporales y datos de precipitación.

2.5. Hipótesis

2.5.1.Hipótesis general

El software que utiliza la transformada wavelet se convierte en una herramienta útil para caracterizar la distribución temporal de las precipitaciones en la ciudad de Puno, ajustándose en un 85% a su comportamiento real.

2.5.2.Hipótesis específicas

La investigación facilita la comprensión de los principios de la transformada Wavelet.

Con una implementación computacional adecuada, la Transformada Wavelet describe de manera precisa el comportamiento de datos en series temporales.

CAPITULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Lugar de estudio.

La investigación, que se centra en el desarrollo de un algoritmo teórico, se llevará a cabo en la Universidad Nacional del Altiplano en Puno. Durante el estudio, se utilizarán los laboratorios de computación de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas de la UNA-Puno.

El Departamento de Puno está situado en la región Sur-Oriental del país, limitando al Norte con el Departamento de Madre de Dios; al Este con la República de Bolivia; al Sur con el Departamento de Tacna; y al Oeste con los Departamentos de Moquegua, Arequipa y Cusco.

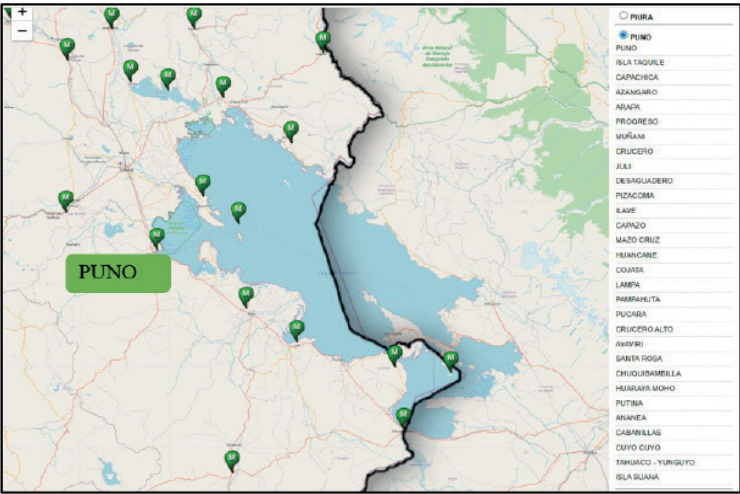
La altitud juega un papel crucial en la geografía de Puno. El área más baja se encuentra alrededor del lago Titicaca, con riberas a 3809 metros sobre el nivel del mar, desde donde el terreno asciende gradualmente hasta alcanzar altitudes de 3900 a 4000 metros sobre el nivel del mar. Puno abarca una extensión de 72,382 km² y cuenta con una población superior al millón de habitantes.

El clima en la región es frío y semiseco, con una temperatura media anual de 9°C y de 3°C durante el invierno. La capital es Puno, situada a orillas del lago Titicaca y a una altitud de 3827 metros sobre el nivel del mar, donde se encuentra la Universidad Nacional del Altiplano.

3.2. Población.

La población objeto de estudio consistió en el conjunto de las descargas hidrológicas medias diarias registradas a lo largo del tiempo en la estación meteorológica convencional de Puno, durante el período de 1964 a 2012, y pertenecientes al Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología.

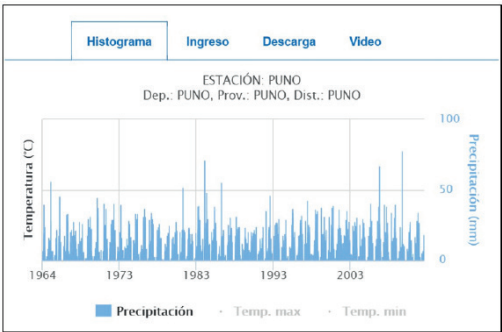
Figura 22: puntos de datos Hidrometeorológicos de Puno.
Fuente: SENAMHI



3. 3. Muestra.

La muestra de estudio estuvo compuesta por los datos de la serie histórica de las descargas hidrológicas medias diarias registradas entre 2007 y 2011, totalizando 1826 datos. Se utilizó un muestreo no probabilístico, específicamente un muestreo por conveniencia, debido a la disponibilidad de la serie de datos. La Figura 23 presenta los puntos de datos hidrometeorológicos de Puno.

Figura 23: Serie histórica de las descargas hidrológicas.
Fuente: SENAMHI



3.4. Método de investigación.

3.4.1. Metodología general

El objetivo principal de la investigación es desarrollar un modelo matemático que facilite el análisis de series de tiempo de precipitaciones pluviales en la ciudad de Puno. Este modelo se representa como un sistema SISO (Single Input, Single Output), permitiendo el acceso a los parámetros internos que reflejan las condiciones fundamentales de su funcionamiento. El sistema ofrece un entorno de programación con visualización dinámica de resultados y fácil acceso a parámetros y bloques de control, aprovechando toda la capacidad de cálculo de Matlab. Así, la estructura conceptual de un modelo de caja-gris, compuesto por bloques de cálculo interconectados por el flujo de impulsos, se materializa en la visualización proporcionada por Matlab. Se emplea el método inductivo bajo un enfoque cualitativo en la investigación científica para interpretar y contrastar los datos obtenidos del SENAMHI – Puno con los datos reconstruidos mediante la Transformada Discreta Wavelet (TWD) inversa, con el objetivo de verificar la eficacia y el correcto funcionamiento del modelo.

3.5. Descripción detallada de métodos por objetivos específicos

3.5.1. Aplicar la Transformada Wavelet como un método de solución numérica para facilitar el análisis de series temporales.

Para alcanzar el objetivo propuesto, la variable independiente es la transformada wavelet, mientras que la variable dependiente es el método de solución numérica desarrollado basado en el estudio de la transformada wavelet.

En el marco teórico, Rocha y Alves (2004) explican que, al expandir y trasladar continuamente la ondícula madre en la Transformada Wavelet Continua (TWC), se genera una gran cantidad de información redundante. Para resolver este problema, la ondícula madre puede expandirse y trasladarse utilizando escalas y posiciones diádicas. Este procedimiento conduce a la construcción de un esquema más eficiente conocido como Transformada Wavelet Discreta (TWD), que está representado por una suma de ondículas según la ecuación (1.3).

Para aplicar la TWD a una serie temporal de datos, es necesario implementar la transformada discreta como herramienta numérica, un concepto desarrollado por Mallat (1989). y se desarrolla como sigue

3.5.1.1. Discretización de la transformada wavelet

Para el proceso de discretización una función f mediante la transformada wavelet discreta de funciones $L^2(\mathbb{R})$, se parte de una wavelet $\psi(t)$. Ahora, para cada $j \in \mathbb{Z}$, se toma la escala $a=2^{-j}$, y a su vez se discretiza el dominio temporal en los puntos $b=2^{-j}k$, $k \in \mathbb{Z}$. Notemos que a mayor escala se toman puntos más distantes, pues se busca una información global; por otro lado a menor escala se buscan los detalles de la función, por dicha razón se realiza el muestreo en puntos menos distantes entre sí. Dicho de otra manera el muestreo en el tiempo se ajusta proporcionalmente a la escala. (Mallat, 1989)

Dicha cantidad discreta de coeficientes wavelet son:

$$c_{j,k} = TWC(2^{-j}, 2^{-j}k) = \langle f, \psi_{2^{-j}, 2^{-j}k} \rangle$$

Donde $j, k \in \mathbb{Z}$. Sólo se está tomando una cantidad discreta de traslaciones (factor de traslación) y dilatación (factor de escala) de la función wavelet, a saber:

$$\psi_{2^{-j}, 2^{-j}k} = \frac{1}{\sqrt{2^{-j}}} \psi\left(\frac{1-2^{-j}k}{2^{-j}}\right) = 2^{j/2} \psi(2^j - k) = \psi(j, k)$$

A partir de ahora, la función $\psi_{j,k}$ se lee como: wavelet ψ comprimida un factor de 2^j y trasladada al entero k .

Para cada función $f \in L^2$, se calcula los coeficientes de la TWD, mediante la expresión:

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int f(x) \overline{\psi(2^j x - k)} 2^{j/2} dx$$

3.5.1.2. Análisis de multiresolución

Una sucesión $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespacios cerrados de $L^2(\square)$ es un análisis multirresolución de $L^2(\square)$ (o también aproximación multiescala). La construcción de la wavelet ψ pasa a través de una descomposición de $L^2(\square)$ en subespacios cerrados, encajados y de una función denominada ϕ función de escala.

La función de escala ϕ puede expandirse como combinación lineal infinita de su dilatación y traslación; es decir:

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} h_k \phi(2x - k)$$

Los coeficientes $h = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ asociado a la función de escala constituyen el filtro, cabe notar que el filtro h es un filtro pasa bajo asociado a la función de escala ϕ .

Para llevar a cabo un proceso de filtrado en múltiples niveles, comenzamos con el filtro de un solo nivel y luego iteramos este proceso, aplicándolo a la señal de salida, específicamente a las aproximaciones (A_i) . Este procedimiento resulta en una descomposición multinivel, también conocida como ramificación o árbol de descomposición.

Figura 24: Árbol de descomposición wavelet.

Fuente: Elaboración propia

3.5.1.3. Reconstrucción wavelet

Una vez comprendida la base teórica de la descomposición wavelet mediante filtros, y dado que la herramienta matemática utilizada es la transformada wavelet, es crucial establecer su transformada inversa. En otras palabras, se necesita reconstruir la señal a partir de los datos obtenidos del árbol de descomposición wavelet. Este proceso se denomina transformada inversa wavelet (discreta) y está detallado en la figura 13.

Una vez que se tienen los coeficientes $c_{j,k}$, se procede con la reconstrucción o síntesis de la función f (o síntesis de la señal SS). Se

denomina también wavelet sintetizada ψ , tal que:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

Como se ha descrito, la transformada wavelet, como herramienta numérica, se fundamenta en un proceso de filtrado multinivel utilizando sus componentes (A y D). Posteriormente, la señal se reconstruye mediante la transformada inversa wavelet.

3.5.2. Implementar rutinas computacionales que faciliten el análisis de la transformada Wavelet en series de tiempo y campos de precipitación.

Para alcanzar el objetivo, se toma como variable independiente las rutinas computacionales basadas en la transformada wavelet y como variable dependiente el análisis de series de tiempo.

Es crucial destacar que la herramienta numérica a utilizar es el proceso de filtrado multinivel, tal como se explicó anteriormente. Además, es importante mencionar que los filtros deben ser diseñados de manera complementaria; de lo contrario, se podría perder una gran cantidad de información si se diseñan de forma separada.

3.5.2.1. Diseño del algoritmo.

A continuación, se detallan, de manera general, las estrategias para llevar a cabo el tratamiento o procesamiento de señales en series de tiempo:

a) Se parte de la señal adquirida (S), la cual proviene de fuentes secundarias y no personales, dado que se accedió a los datos a través de los registros del Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología (SENAMHI).

b) Se aplica la transformada wavelet en las escalas 1, 2, 3 y 4.

c) Se realiza un análisis multirresolución a 4 escalas utilizando una wavelet tipo Haar. En este análisis, la señal se divide en detalles (D) y aproximaciones (A). Los coeficientes de detalle, que representan el ruido (señal de alta frecuencia), se aprecian con mayor

amplitud, mientras que las aproximaciones representan la señal de bajas frecuencias. Los detalles (D_i) y la última aproximación (A_4) se almacenan en un archivo para ser visualizados posteriormente en la interfaz gráfica.

d) Finalmente, se lleva a cabo la reconstrucción o síntesis de la señal mediante la transformada wavelet inversa discreta, aplicando el proceso a diferentes niveles de detalle:

$$SS_1 = c A_4 + c D_4$$

$$SS_2 = c A_4 + c D_4 + c D_3$$

$$SS_3 = c A_4 + c D_4 + c D_3 + c D_2$$

$$SS_4 = c A_4 + c D_4 + c D_3 + c D_2 + c D_1$$

e) La señal sintetizada (SS_i) se guarda en un archivo de datos, que posteriormente se carga en la interfaz gráfica para visualizar la síntesis correspondiente a cada conjunto de detalles mencionados en el ítem d).

f) Finalmente, se cargan los datos de la señal original (S), los detalles (D_i), la última aproximación (A_4) y la señal sintetizada (SS_i) en la interfaz gráfica creada, permitiendo la visualización completa del análisis.

3.5.2.2. Proceso de análisis de la señal

Dada la función f (señal original S), se puede descomponer como:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(x+k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \psi(x+k)$$

Donde ϕ representa a la función de escala ortonormal:

$$\phi(x+k) = \sum_m \sqrt{2} h_m \phi(2x+2k-m)$$

Y ψ es la ecuación que define la wavelet.

$$\psi(x+k) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \sqrt{2} g_m \phi(2x+2k-m)$$

Donde se verifica que

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} g_j \overline{h_j} = 0 = \langle g, h \rangle$$

Basado en la ecuación anterior, se entiende o define a h como un filtro pasa bajo, y a g como el filtro pasa alto.

Para llevar a cabo este proceso, se calcula las constantes c_k de la transformada wavelet discreta, las cuales se definen como:

$$c_k = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \overline{h_m} s_{2k-m}$$

Seguido del cálculo de los detalles D_k :

$$D_k = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \overline{g_m} s_{2k-m}$$

3.5.2.3. Proceso de síntesis de la señal

El proceso para lograr sintetizar la señal consiste en:

- a) intercalar ceros entre los coeficientes de c y realizar la convolución con \tilde{h}
- b) intercalar ceros entre los coeficientes de d y realizar la convolución con g
- c) y después sumar ambas convoluciones. Filtros ortogonales de análisis: h y g (sus conjugados).

Filtros de análisis: \overline{h} y \overline{g} (sus conjugados)

Filtros de síntesis: \tilde{h} y \tilde{g} (sus transpuestos)

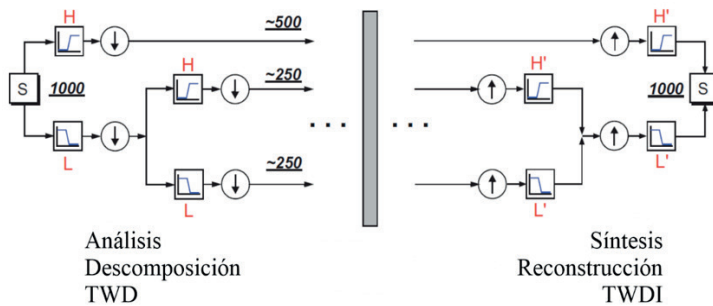
Luego se procede a calcular:

$$SS = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k h_{2k-n} + \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k g_{2k-n}$$

El diseño del algoritmo para alcanzar el objetivo específico, se puede representar por el siguiente esquema:

Figura 25: Análisis y síntesis de la caracterización de señales de precipitación.

Fuente: Misiti et al, 1997



CAPITULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Información de los datos Hidrológicos.

La serie histórica de descargas hidrológicas medias diarias, que abarca el período de 2007 a 2011, sirvió como base para el modelamiento en series temporales utilizando la transformada wavelet. Esta serie, registrada por el SENAMHI-Puno, se considera la señal original (S) y se muestra en la Figura 23. El conjunto completo de datos comprende 1826 registros hasta la fecha.

4.1.1. Operacionalización de variables.

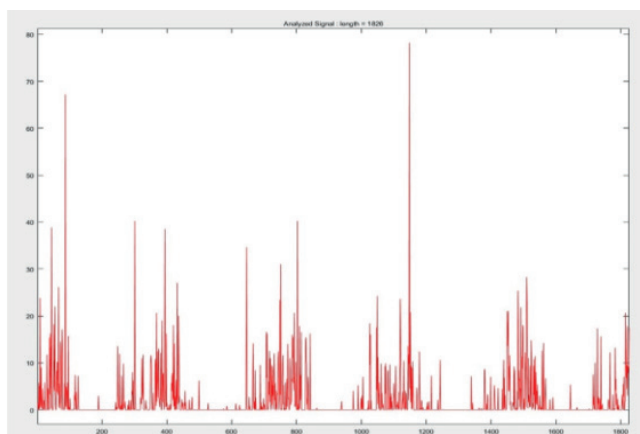
Para el análisis de los datos de la serie histórica o señal original (S), la Figura 23 presenta las precipitaciones medias diarias registradas en la ciudad de Puno como variable dependiente. La transformada wavelet, aplicada como herramienta para el análisis en series de tiempo, actúa como la variable independiente.

4.2. Modelamiento en base a la transformada wavelets.

Para modelar los datos de las descargas hidrológicas medias diarias, se utiliza la transformada discreta wavelet (TWD), empleando filtros pasa alta y pasa baja. El primer paso consiste en introducir las descargas hidrológicas medias diarias en Matlab como una señal (S). A continuación, se inicia el proceso de filtrado. Los datos iniciales para este proceso están representados en la Figura 26.

Figura 26: Señal Original (S).

Fuente: Elaboración propia.



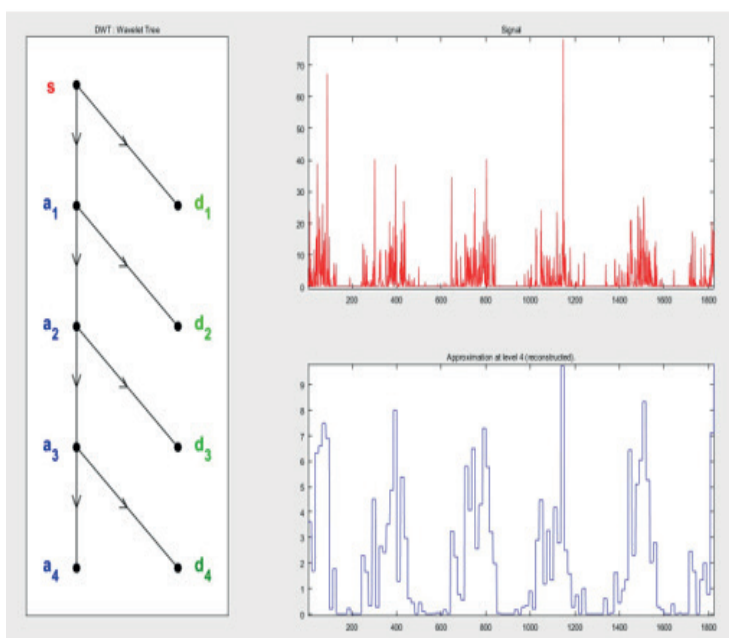
La figura 26, muestra la señal original (S), la cual está constituida por las descargas medias diarias registradas.

4.2.1. Proceso de filtrado

El procedimiento se lleva a cabo sobre la señal original (S) utilizando la transformada discreta wavelet (TWD) con la wavelet madre de Haar. Se efectúan 4 iteraciones para lograr una descomposición más detallada de la señal. La Figura 27 ilustra el resultado del proceso de filtrado, mostrando el esquema del árbol de descomposición de la señal, así como la señal original (S) y la última aproximación (A4).

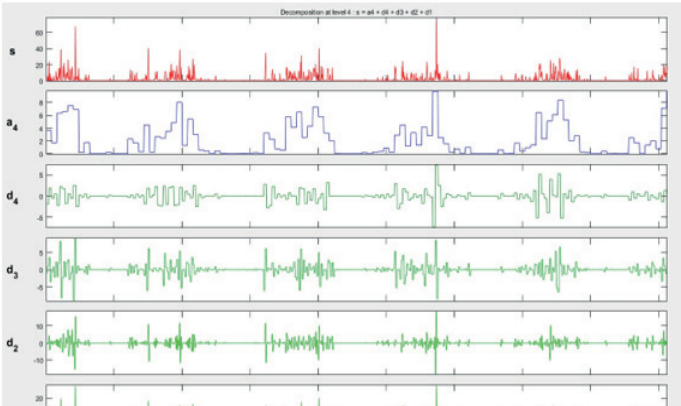
Figura 27: Proceso de filtrado basado en 04 niveles.

Fuente: Elaboración propia.



Además, el del esquema anterior (Figura 27), se obtiene también la aproximación de nivel 04 (A4) y los detalles 1, 2, 3 y 4 (D1, D2, D3, D4) tal como se muestra en la Figura 28.

Figura 28: Descomposición de la señal en 04 niveles.
Fuente: Elaboración propia.

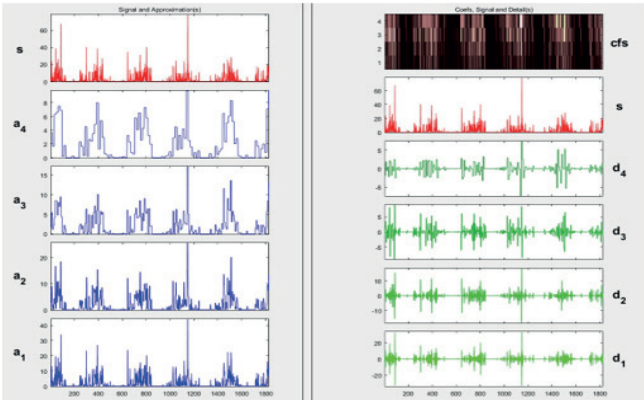


Después de la descomposición iterativa utilizando la TWD, el siguiente paso es la reconstrucción de la señal. Esto se realiza mediante la transformada discreta inversa wavelet (TWDI), utilizando las constantes, aproximaciones (A) y detalles (D) obtenidos en los pasos anteriores.

Para lograr una mejor comprensión de dicho proceso se realiza la reconstrucción para diferentes valores de los detalles D_i ; $i=1,2,3,4$. Y se detalla como sigue:

En primer lugar se muestra en la figura 29, las cuatro aproximaciones (A_i ; $i=1, 2, 3, 4$) y cuatro detalles (D_i ; $i=1, 2, 3, 4$).

Figura 29: Aproximaciones (A_i) y detalles (D_i) de la descomposición de (S)
Fuente: Elaboración propia.



En segundo lugar, se inicia la reconstrucción de la señal tomando la aproximación cuatro (A4) y diferente configuración de los detalles (D_i ; $i=1, 2, 3, 4$), la sintetización de la señal para las diferentes configuraciones se resume en:

$$SS_1 = c A_4 + c D_4$$

$$SS_2 = c A_4 + c D_4 + c D_3$$

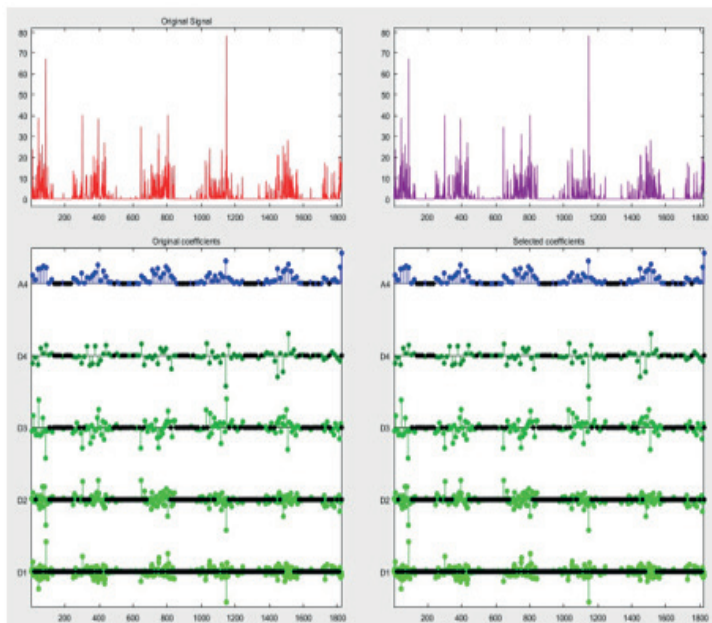
$$SS_3 = c A_4 + c D_4 + c D_3 + c D_2$$

$$SS_4 = c A_4 + c D_4 + c D_3 + c D_2 + c D_1$$

Podemos notar que para calcular la señal sintetizada (SS_i), se requiere de las constantes “c” y dichas constantes están relacionadas a cada aproximación (A_i ; $i=1, 2, 3, 4$) y detalle (D_i ; $i=1, 2, 3, 4$), dichas constantes se muestran en la figura 30.

Figura 30: Coeficientes de la aproximación (A_i) y detalle (D_i).

Fuente: Elaboración propia.



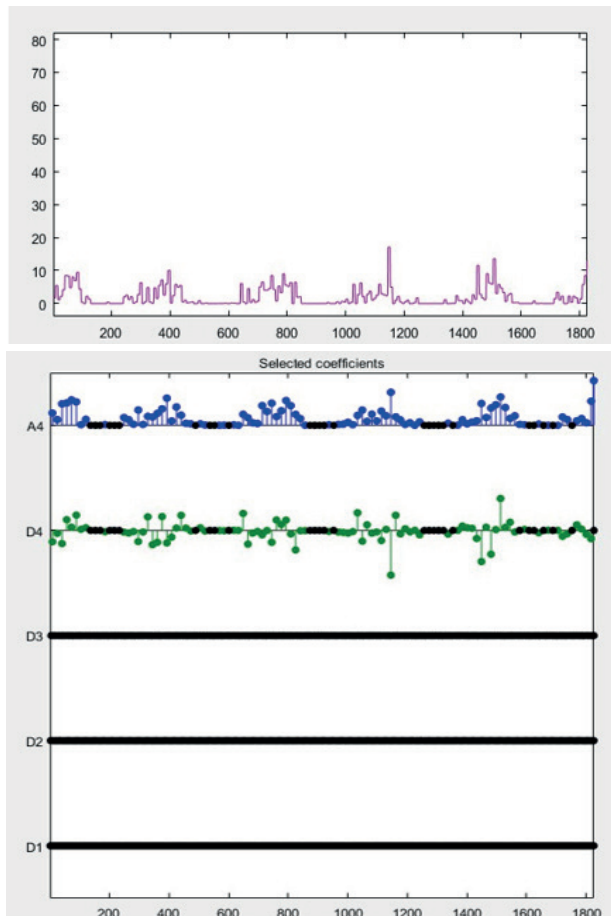
4.2.2. Síntesis de la señal

En base a las aproximaciones (A_i) y detalles (D_i) de la descomposición de (S) conjuntamente con los coeficientes de la aproximación (A_i) y detalle (D_i) tal como se muestran en la figura 29 y 30 respectivamente, se inicia la síntesis de la señal (SS) tal como sigue:

Primera síntesis de la señal; se considera $SS1 = c A4 + c D4$

Figura 31: Primera síntesis de la señal $SS1 = c A4 + c D4$

Fuente: Elaboración propia.



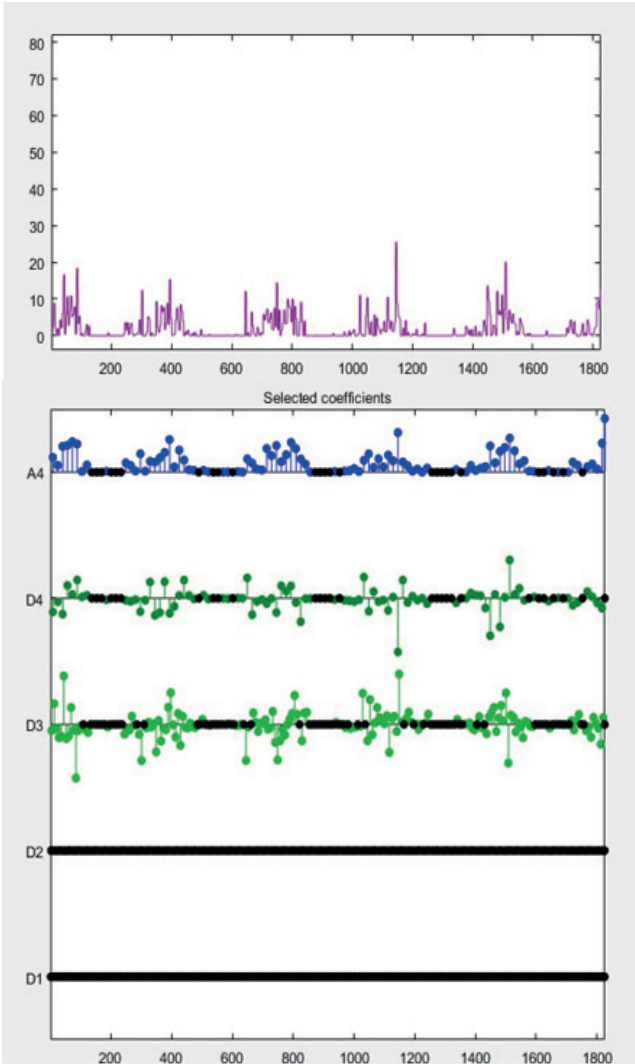
La figura 31 muestra la primera síntesis de la señal o primera reconstrucción de la señal, la cual en comparación con la señal original (Figura 26) muestra una gran diferencia. Por la cual se

verifica que la primera síntesis no es una aproximación exacta a la señal original.

Segunda síntesis de la señal; se considera $SS2= c A4 + c D4+c Dd3$

Figura 32: Segunda síntesis de la señal $SS2= c A4 + c D4+c Dd3$

Fuente: Elaboración propia.

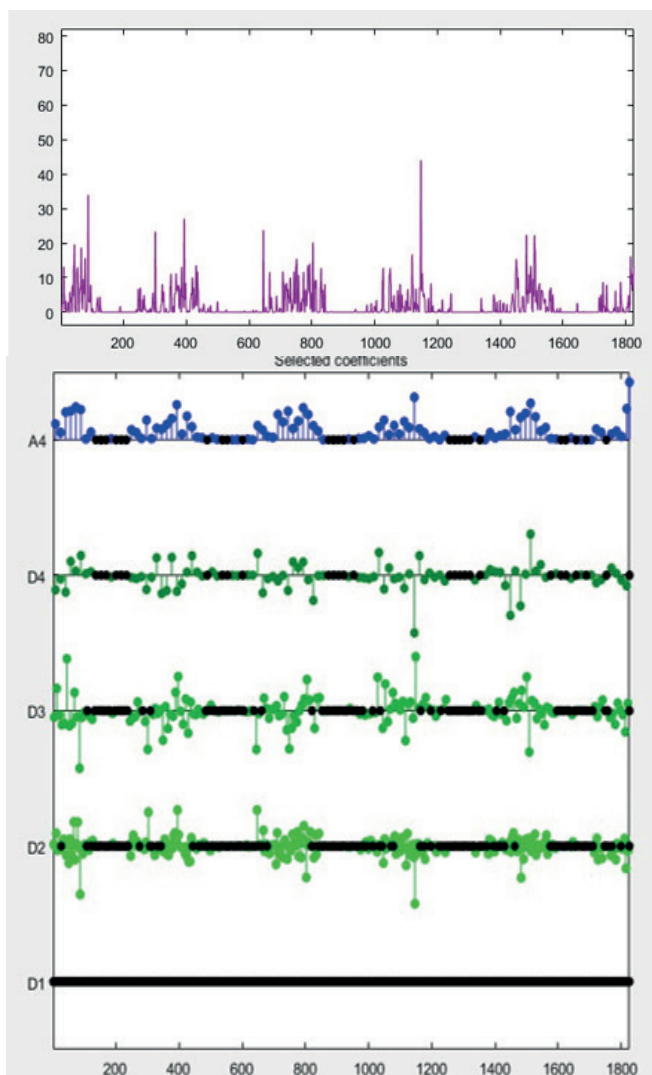


La figura 32 presenta la segunda síntesis de la señal o su segunda reconstrucción. Al compararla con la señal original mostrada en la figura 26, se observa una diferencia significativa, lo que indica que esta segunda reconstrucción aún no aproxima con exactitud la señal original.

Tercera síntesis de la señal; se considera $SS3 = c A4 + c D4 + c D3 + c D2$

Figura 33: Tercera síntesis de la señal $SS3 = c A4 + c D4 + c D3 + c D2$

Fuente: Elaboración propia.

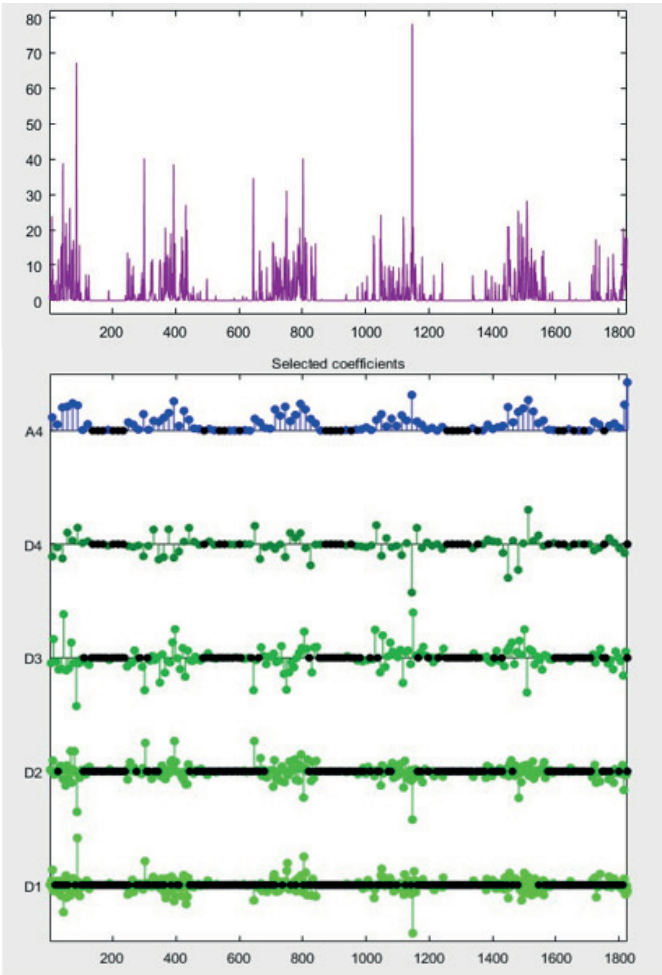


La figura 33 ilustra la tercera síntesis de la señal o su tercera reconstrucción. En comparación con la señal original (Figura 26), se observa una diferencia menor, lo que indica que esta tercera síntesis se aproxima de manera más cercana a la señal original, aunque aún no es completamente exacta.

Cuarta síntesis de la señal; se considera $SS4= c A4 + c D4+c D3+c D2+c D1$

Figura 34: Cuarta síntesis de la señal $SS4= c A4 + c D4+c D3+c D2+c D1$

Fuente: Elaboración propia.



La figura 34 presenta la cuarta síntesis de la señal o su cuarta reconstrucción. Comparada con la señal original (Figura 26), muestra una diferencia muy mínima, lo que confirma que esta cuarta síntesis es una aproximación muy precisa a la señal original.

El desarrollo mostrado haciendo uso de diferentes combinaciones de $a4$ y los d_i , nos muestran la importancia de la aproximación ($a4$) y la interpolación con todos sus detalles ($d1$, $d2$, $d3$ y $d4$) dentro de

una descomposición multinivel o proceso iterativo tanto para el uso de la DWT y la DWTI, tal y cual lo señala (Misiti et al. 1997).

CONCLUSIONES

En este capítulo, se presentan las principales conclusiones derivadas de la implementación de la transformada wavelet para el análisis de señales en series temporales, detalladas de la siguiente manera:

Primera: La aplicación del modelo basado en la transformada wavelet filtra la señal original "S" utilizando la transformada wavelet discreta con la transformada de Haar en cuatro niveles. Esto permite sintetizar la señal a través de la transformada wavelet discreta inversa, logrando una reconstrucción completa de la señal "SS" que se ajusta al comportamiento real de la señal original, como se muestra en la figura 34.

Segunda: Se ha determinado que existe una relación directa entre el uso de la transformada wavelet discreta y la aplicación de filtros pasa alto y pasa bajo. Estos filtros, aplicados en un proceso de análisis multirresolución, permiten descomponer la señal "S" y posteriormente sintetizarla nuevamente como "SS" mediante la transformada wavelet discreta inversa.

Tercera: Las rutinas computacionales desarrolladas para la investigación operan sin necesidad de profundizar en los fundamentos matemáticos abstractos de la transformada wavelet. La implementación de la transformada wavelet discreta y su inversa, usando la transformada de Haar, ha sido detallada y validada para la reconstrucción de la señal.

RECOMENDACIONES

Se recomienda llevar a cabo una caracterización de las descargas hidrológicas medias diarias utilizando la transformada de Fourier para comparar su eficacia con la transformada wavelet. Según la literatura, la transformada wavelet (TWC), con una resolución adecuada, ofrece una mayor precisión en

la identificación de los momentos exactos en los que ocurren los detalles de la señal, reduciendo así la incertidumbre en el análisis.

Para la caracterización de la señal original, se emplea la transformada de Haar. Se sugiere también explorar diferentes familias o bases de wavelets, tales como Haar, Daubechies, Symlets, Coiflets, Biorotogonal, Morlet, Mexican Hat y Meyer, así como experimentar con diversos niveles de descomposición para obtener una visión más completa de la señal.

BIBLIOGRAFÍA

Abdulmunem, Matheel E., and Fatima B. Ibrahim. 2016. "The Design of Efficient Algorithm for Face Recognition Based on Hybrid PCA-Wavelet Transform." *Iraqi Journal of Science* 57(2):995–1006.

Addison, Paul S. 2016. *The Illustrated Wavelet Transform Handbook: Introductory Theory and Applications in Science*. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press.

Alexander, Charles K., and Matthew N. O. Sadiku. 2006. *Fundamentos de Circuitos Eléctricos*. 3a Ed. España: McGraw Hill.

Bateman, Allen. 2007. "HIDROLOGIA BASICA Y APLICADA."

Bhardwaj, Anuj, and Rashid Ali. 2009. "Image Compression and Reconstruction Using Modified Fast Haar Wavelet Transform." *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences* 7(5):647–53.

Cano, Eduardo, Rubén Salcedo, and Gustavo Soto. 2015. "Análisis de Principios y Aplicaciones de La Transformada Wavelet." 2(1).

Carbajal Carrasco, Mariella, Christian Yarlequé, Elizabeth Silvestre, Abel Mejía, and Roberto Quiroz. 2010. "Reconstrucción de Datos Faltantes de Precipitación Pluvial Diaria Mediante La Transformada Wavelet Daily Rainfall Data-Gap Filling Using a Wavelet Transform-Based Methodology." *REVISTA PERUANA GEO-ATMOSFÉRICA RPGA* (2) 88(2):76–88.

Castro, Liliana R., and Silvia M. Castro. 2004. "Wavelets y Sus Aplicaciones." 1er. Congreso Argentino de Ciencias de La

Computación 195–204.

Chereque Morán, Wendor. 1989. Hidrología. Segunda. Lima.

Chui, Charles K., and Christopher Heil. 1992. An Introduction to Wavelets. Vol. 6.

Cortes Osorio, Jimmy, Hugo Cano Garzón, and José Chaves Osorio. 2007. "Del Análisis De Fourier A Las Wavelets." *Scientia et Technica* 5(37):133–38. doi: 10.22517/23447214.4017.

Fernández Serdán, José Miguel. 2009. "'Dinosaurios' Meteorológicos de Montaña: Los Totalizadores de Precipitación." <https://www.tiempo.com/ram/809/Dinosaurios-Meteorologicos-de-Montana/>. Retrieved July 18, 2022 (<https://www.tiempo.com/ram/809/dinosaurios-meteorologicos-de-montana/>).

Figuerola Ortiz, Carlos Albeiro. 2016. "Caracterización Del Campo de Precipitación Sobre La Microcuenca Urbana Del Campus Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá." Maestría, Universidad Nacional de Colombia Facultad.

González, María Pilar. 2007. Análisis de Series Temporales Económicas: Modelos ARIMA.

Mallat, Stephane. 1999. A WAVELETTOUR OF SIGNAL PROCESSING. Stephane.

Mallat, Stéphane. 1999. "Fourier Kingdom." *A Wavelet Tour of Signal Processing* 20–41. doi: 10.1016/b978-012466606-1/50004-0.

Mallat, Stephane G. 1989. "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation." *Fundamental Papers in Wavelet Theory* 11(7):494–513. doi: 10.1515/9781400827268.494.

Mancero Mosquera, Isaac, and Xavier Ochoa Chehab. 2015. "Análisis de Fourier y Wavelet de Las Series de Tiempo de La Estación Meteorológica Espol-Fimcbor." *Revista Tecnológica ESPOL* 28(Septiembre):34–50.

Martínez, M., L. Gómez, A. J. Serrano, and J. Gómez. 2010.

Introducción a Los Filtros Digitales. España: Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Electrónica.

Mauricio, José Alberto. 2007. Análisis de Series Temporales.

Meyer Baese U. 2007. Digital Signal Processing with Field Programmable Gate Arrays. 3a ed. Estados Unidos: Springer.

Misiti, Michel, Yves Misiti, Georges Oppenheim, and Jean Michel Poggi. 1997. Wavelet Toolbox™ 4 User's Guide Product Enhancement Suggestions Wavelet Toolbox™ User's Guide.

Nelson, Roger. 2002. "ClimGen."

Parodi O., Ismael, Darwing Sobrino P., Ortega P. Jesús, Luis Villa S., and Jalil Janna P. n.d. "INTESCO - Soluciones Hídricas Confiables." <https://www.intesco.com.co/Sabes-En-Que-Se-Diferencian-Un-Pluviometro-y-Un-Pluviografo/>. Retrieved July 18, 2022 (<https://www.intesco.com.co/sabes-en-que-se-diferencian-un-pluviometro-y-un-pluviografo/>).

Rocha Reis, Agnaldo, and Alexandre P. Alves Da Silva. 2004. "APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA NA PREVISÃO DE CARGA A CURTO PRAZO VIA REDES NEURAIS." doi: 10.1590/S0103-17592004000100013.

Rodríguez, R., and M. C. Llasat. 1997. "Análisis Temporal y Espectral de La Serie de Precipitación Mensual de Barcelona (España) 1850-1991." Ingeniería Del Agua 4(4):19–28. doi: 10.4995/ia.1997.2732.

Rubio Cerda, Eduardo, Juan C. Jáuregui Correa, and Oscar González Brambila. 2006. "Aplicación de La Transformada Wavelet En La Detección de Defectos Causados Por Vibrado En Piezas Cilíndricas Rectificadas." Ingeniería Mecánica. Tecnología y Desarrollo 47–52.

Segerer, Carlos D., and Rubén Villodas. 2006. "Hidrología I." P. 2 in Hidrología I.

Serrano, Eduardo P., Alejandra Figliola, and Marcela Fabio. 2012. "Time-Frequency Methods Based on the Wavelet Transform."

Revista de Matemática Teoría y Aplicaciones 19(2):157–68.

Yarlequé, Christian, Adolfo Posadas, and Roberto Quiroz. 2007. "Reconstrucción de Datos de Precipitación Pluvial En Series de Tiempo Mediante Transformadas de Wavelet Con Dos Niveles de Descomposición." (December).



ISBN: 978-9942-684-17-2

