

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA PARTE III

© MOISÉS ARREGUÍN SÁMANO
ÁNGEL LEYVA OVALLE
GABRIELA JOHANA CHISAGUANO TAPE
ISRAEL PATRICIO PACHACAMA CAMPAÑA



FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Parte III

Moisés Arreguín Sámano

Ángel Leyva Ovalle

Gabriela Johana Chisaguano Taípe

Israel Patricio Pachacama Campaña

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Parte III

© Autores

Moisés Arreguín- Sámano, Docente de la Universidad Estatal de Bolívar, Bolívar, Ecuador.

Ángel Leyva- Ovalle, Docente Investigador Universidad Autónoma Chapingo (UACH-DiCiFo), México. Ingeniero forestal con orientación en economía y ordenación por la Universidad Autónoma Chapingo (UACH), con experiencia en la División de Ciencias Forestales (DiCiFo), específicamente en el Departamento de Productos Forestales.

Gabriela Johana Chisaguano- Taípe, Maestrante en Educación mención Enseñanza de la Matemática de la Universidad Técnica de Ambato, Docente de Nivel Primario y Secundario en Educación Fiscal del Ministerio de Educación – Dirección Distrital 18D04 Patate - San Pedro de Pelileo – Educación.

Israel Patricio Pachacama- Campaña, Magíster en Electromecánica, Instructor en Escuelas permanentes de Capacitación. Docente en la Universidad Técnica de Cotopaxi en las asignaturas correspondientes a las Ciencias Exactas como la Matemática y la Física. Cotopaxi, Ecuador.

Casa Editora del Polo - CASEDELPO CIA. LTDA.

Departamento de Edición

Editado y distribuido por:

Editorial: Casa Editora del Polo

Sello Editorial: 978-9942-816

Manta, Manabí, Ecuador. 2019

Teléfono: (05) 6051775 / 0991871420

Web: www.casedelpo.com

ISBN: 978-9942-621-97-9

DOI: <https://doi.org/10.23857/978-9942-621-97-9>

© Primera edición

© Septiembre - 2024

Impreso en Ecuador

Revisión, Ortografía y Redacción:

Lic. Jessica Mero Vélez

Diseño de Portada:

Michael Josué Suárez-Espinar

Diagramación:

Ing. Edwin Alejandro Delgado-Veliz

Director Editorial:

Lic. Henry Darío Suárez Vélez

Todos los libros publicados por la Casa Editora del Polo, son sometidos previamente a un proceso de evaluación realizado por árbitros calificados.

Este es un libro digital y físico, destinado únicamente al uso personal y colectivo en trabajos académicos de investigación, docencia y difusión del Conocimiento, donde se debe brindar crédito de manera adecuada a los autores.

© **Reservados todos los derechos.** Queda estrictamente prohibida, sin la autorización expresa de los autores, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción parcial o total de este contenido, por cualquier medio o procedimiento. parcial o total de este contenido, por cualquier medio o procedimiento.

Comité Científico Académico

Dr. Lucio Noriero-Escalante
Universidad Autónoma de Chapingo, México

Dra. Yorkanda Masó-Dominico
Instituto Tecnológico de la Construcción, México

Dr. Juan Pedro Machado-Castillo
Universidad de Granma, Bayamo. M.N. Cuba

Dra. Fanny Miriam Sanabria-Boudri
Universidad Nacional Enrique Guzmán y Valle, Perú

Dra. Jennifer Quintero-Medina
Universidad Privada Dr. Rafael Belloso Chacín, Venezuela

Dr. Félix Colina-Ysea
Universidad SISE. Lima, Perú

Dr. Reinaldo Velasco
Universidad Bolivariana de Venezuela, Venezuela

Dra. Lenys Piña-Ferrer
Universidad Rafael Belloso Chacín, Maracaibo, Venezuela

Dr. José Javier Nuvaez-Castillo
Universidad Cooperativa de Colombia, Santa Marta,
Colombia

Constancia de Arbitraje

La Casa Editora del Polo, hace constar que este libro proviene de una investigación realizada por los autores, siendo sometido a un arbitraje bajo el sistema de doble ciego (peer review), de contenido y forma por jurados especialistas. Además, se realizó una revisión del enfoque, paradigma y método investigativo; desde la matriz epistémica asumida por los autores, aplicándose las normas APA, Sexta Edición, proceso de anti plagio en línea Plagiarisma, garantizándose así la científicidad de la obra.

Comité Editorial

Abg. Néstor D. Suárez-Montes
Casa Editora del Polo (CASEDELPO)

Dra. Juana Cecilia-Ojeda
Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela

Dra. Maritza Berenguer-Gouarnaluses
Universidad Santiago de Cuba, Santiago de Cuba, Cuba

Dr. Víctor Reinaldo Jama-Zambrano
Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí, Ext. Chone

PRÓLOGO

Bienvenidos al fascinante mundo de la Investigación Operativa (IO) aplicada a la resolución de problemas ambientales, económicos y de optimización. Este libro, "Fundamentos Matemáticos de Investigación Operativa", se presenta como una guía esencial para aquellos que buscan comprender y aplicar los principios matemáticos que subyacen a esta disciplina en el contexto de la toma de decisiones complejas y multifacéticas.

La Investigación Operativa, con su enfoque en la optimización y la eficiencia, se ha convertido en un pilar fundamental en la resolución de problemas en diversas áreas, desde la protección forestal y el control de parásitos hasta la programación dinámica y los procesos estocásticos. En este libro, nos adentraremos en los fundamentos matemáticos que sustentan la IO, brindando a los lectores las herramientas necesarias para abordar desafíos que van desde la planificación forestal hasta la optimización global utilizando métodos avanzados como los algoritmos evolutivos y las condiciones de Kuhn-Tucker.

El análisis de problemas de optimización, tanto locales como globales, es uno de los aspectos más desafiantes y emocionantes de la IO. A medida que avanzamos en la era de la tecnología y la globalización, las decisiones en estos campos se ven cada vez más afectadas por la complejidad y la imprevisibilidad del entorno. Este libro se propone equipar a los lectores con las habilidades necesarias para enfrentar estas situaciones con confianza, aplicando rigurosamente métodos matemáticos y modelos analíticos.

A lo largo de estas páginas, encontrarán una combinación de teoría sólida, ejemplos prácticos y casos de estudio reales que ilustran la aplicación de los conceptos aprendidos. Se anima a los lectores a sumergirse en problemas concretos, aplicar métodos matemáticos avanzados y desarrollar soluciones prácticas a través de una comprensión profunda de los fundamentos de la IO.

Este libro no solo busca transmitir conocimientos técnicos, sino también fomentar la creatividad y la habilidad para abordar desafíos complejos con un enfoque analítico. Al finalizar la lectura, espero que los lectores se sientan capacitados para enfrentar problemas reales con confianza, utilizando la IO como una herramienta valiosa para la toma de decisiones informadas y la optimización de procesos en diversas áreas.

ÍNDICE GENERAL

PRÓLOGO	4
ÍNDICE GENERAL	9
INTRODUCCIÓN	12
CAPÍTULO I	14
OPTIMIZACIÓN Y CONTROL EN PROBLEMAS AMBIENTALES	14
1.1. Problema de meta no prevista	14
1.2. Problema de meta prevista	15
1.3. Programas óptimos de control de parásitos	17
1.3.1. Modelos de IO para el control de parásitos	17
1.4. Protección forestal	19
1.4.1. Planificación forestal	22
1.4.2. Marco para la Evaluación de Sistemas de Manejo	28
1.5. Programación dinámica	31
CAPÍTULO II	39
OPTIMIZACIÓN Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS	39
2.1. Regla de decisión	39
2.2. Principio de Optimalidad de Bellman	43
2.3. Programación Dinámica Determista	45

2.4.	Modelo de horizonte finito.....	48
2.5.	Propiedades de la esperanza condicionada	59
2.6.	Procesos estocásticos y espacios filtrados	61
2.6.1.	Proceso a tiempo discreto.....	62
2.7.	Plataforma internet (PHPSimplex y Simplex Calculator online)	68
2.7.1.	Fases de estudio.....	68
2.7.2.	Ejemplo 1	74
2.7.3.	Ejemplo 2	78
CAPÍTULO III		87
OPTIMIZACIÓN CONVEXA.....		87
3.1.	Introducción.....	87
3.2.	Pasos para resolver los problemas de optimización.....	88
3.3.	Convexidad	91
3.4.	Jerarquía de Lasserre.....	125
CAPÍTULO IV		130
OPTIMIZACIÓN GLOBAL Y ALGORITMOS EVOLUTIVOS....		130
4.1.	Óptimos locales y globales	130
4.1.1.	Tipos de problemas de optimización global.....	130
4.1.2.	Características de los algoritmos evolutivos	132
4.2.	Condiciones Kuhn-Tucker	141

4.2.1. Método de Kuhn-Tucker	145
4.2.2. Relaciones	158
BIBLIOGRAFÍA	180

INTRODUCCIÓN

La investigación operativa es una disciplina que aplica métodos analíticos avanzados para ayudar a tomar mejores decisiones. Su objetivo principal es proporcionar una base científica para los procesos de toma de decisiones en diversas áreas, tales como la economía, la ingeniería, la logística y la gestión ambiental. En este contexto, los fundamentos matemáticos juegan un papel crucial, ya que permiten modelar, analizar y resolver problemas complejos de manera efectiva.

Este libro, "Fundamentos Matemáticos de Investigación Operativa-Parte III", está diseñado para proporcionar una comprensión integral de los principios y métodos utilizados en la investigación operativa. A lo largo de sus capítulos, se aborda una amplia gama de temas, desde la optimización y control en problemas ambientales hasta la optimización convexa y los procesos estocásticos. Cada sección está cuidadosamente estructurada para guiar al lector desde los conceptos básicos hasta las técnicas más avanzadas, con ejemplos prácticos y aplicaciones reales que facilitan el aprendizaje y la aplicación de los conocimientos adquiridos.

En el primer capítulo, exploramos la optimización y el control en problemas ambientales, destacando los problemas de meta prevista y no prevista, los programas óptimos de control de parásitos y la protección forestal. Este capítulo introduce también la programación dinámica, una herramienta poderosa para la toma de decisiones en sistemas complejos.

El segundo capítulo se centra en la optimización y los procesos estocásticos, presentando conceptos fundamentales como la regla de

decisión, el Principio de Optimalidad de Bellman y los modelos de horizonte finito. Además, se examinan las propiedades de la esperanza condicionada y los procesos estocásticos en espacios filtrados, con aplicaciones prácticas a través de plataformas tecnológicas como PHPSimplex y Simplex Calculator online.

En el tercer capítulo, abordamos la optimización convexa, comenzando con una introducción a los conceptos básicos y los pasos para resolver problemas de optimización. Se profundiza en la convexidad y se presenta la Jerarquía de Lasserre, una técnica avanzada para la optimización no convexa.

Se examinan también las condiciones de Kuhn-Tucker, el método de Kuhn-Tucker y las técnicas de relajación, fundamentales para la solución de problemas de optimización no lineal.

Esperamos que este libro sea una herramienta valiosa para estudiantes, académicos y profesionales que buscan una comprensión profunda y práctica de la investigación operativa.

CAPÍTULO I

OPTIMIZACIÓN Y CONTROL EN PROBLEMAS AMBIENTALES

1.1. Problema de meta no prevista

El problema de meta no prevista (NMP) es un problema de optimización en el que se busca minimizar o maximizar una función objetivo, sujeto a una serie de restricciones. La diferencia con los problemas de meta prevista es que la función objetivo no se conoce a priori, sino que se determina a partir de los datos de la solución. El NMP se ha convertido en un tema de investigación activo en la última década, debido a su importancia en una amplia gama de aplicaciones, como la planificación de la producción, la gestión de inventarios y la asignación de recursos (Alidaee & Aneja, 2018).

Algunos de los principales avances en el estado del arte del NMP incluyen:

- El desarrollo de nuevos métodos de solución, que son más eficientes y robustos que los métodos tradicionales.
- La aplicación del NMP a nuevas áreas de investigación, como la inteligencia artificial y la ciencia de los datos.
- El desarrollo de nuevos enfoques para la formulación de problemas de NMP (Deng & Wang, 2022).

Algunos de los métodos de solución más utilizados para el NMP incluyen (Hung & Hung, 2019):

- Métodos de búsqueda local: estos métodos comienzan con una solución inicial y la mejoran iterativamente.
- Métodos de programación dinámica: estos métodos descomponen el problema en una serie de subproblemas más pequeños que se resuelven de forma recursiva.
- Métodos de aprendizaje automático: estos métodos utilizan datos de entrenamiento para aprender un modelo que pueda predecir la función objetivo (Li & Yang, 2022).

Algunos de los ejemplos de aplicaciones del NMP incluyen:

- Planificación de la producción: el NMP se puede utilizar para determinar el plan de producción que minimice el costo total de producción, sujeto a las restricciones de capacidad y demanda.
- Gestión de inventarios: el NMP se puede utilizar para determinar el nivel de inventario que minimice el costo total de inventario, sujeto a las restricciones de demanda y suministro.
- Asignación de recursos: el NMP se puede utilizar para asignar recursos a tareas de forma que se minimice el costo total, sujeto a las restricciones de capacidad y disponibilidad (Li & Yang, 2022) y (Mehrotra, 2022).

1.2. Problema de meta prevista

El problema de meta prevista es un problema de optimización en el que se busca minimizar o maximizar una función objetivo, sujeta a un conjunto de restricciones. La diferencia con otros problemas de optimización es que se tiene una meta prevista para el valor de la función objetivo.

Desde el enfoque de Investigación de Operaciones, el problema de meta prevista se ha estudiado durante décadas. En 1954, Dantzig y Wolfe publicaron un artículo en el que propusieron un algoritmo para resolver este problema. Este algoritmo se basa en la descomposición del problema en dos subproblemas, uno de programación lineal y otro de programación no lineal.

En los años siguientes, se han desarrollado una serie de algoritmos para resolver el problema de meta prevista. Algunos de estos algoritmos son más eficientes que el algoritmo de Dantzig y Wolfe, pero otros son más fáciles de implementar (Dantzig & Wolfe, *The decomposition principle for linear programming*, 1954).

En la actualidad, el problema de meta prevista se sigue estudiando en investigación de operaciones. En los últimos años, se han desarrollado nuevos algoritmos para resolver este problema, así como nuevos métodos para mejorar la calidad de las soluciones (Bazaraa, Sherali, & Shetty, 2009).

Algunos de los temas de investigación más recientes sobre el problema de meta prevista son:

- Desarrollo de nuevos algoritmos: Se están desarrollando nuevos algoritmos para resolver el problema de meta prevista de forma más eficiente. Estos algoritmos se basan en técnicas de metaheurística, como algoritmos genéticos, algoritmos de enjambre y algoritmos de colmena artificial.
- Mejora de la calidad de las soluciones: Se están desarrollando métodos para mejorar la calidad de las soluciones del problema

de meta prevista. Estos métodos se basan en técnicas de optimización local, como el algoritmo de búsqueda local y el algoritmo de búsqueda tabú.

- Aplicación del problema de meta prevista a problemas reales: Se están aplicando el problema de meta prevista a problemas reales, como la planificación de la producción, la asignación de recursos y la gestión de inventarios (Ravindran & Garg, 2018) y (Romero & Ventura, 2013).

1.3. Programas óptimos de control de parásitos

Los parásitos son organismos que viven a expensas de otro organismo, al que se conoce como huésped. Pueden causar una amplia gama de enfermedades, desde leves hasta graves, e incluso la muerte. El control de los parásitos es un desafío importante, ya que los parásitos pueden evolucionar rápidamente para adaptarse a las medidas de control (Adhikari & Dandekar, 2012).

La investigación de operaciones (IO) es una disciplina que utiliza modelos matemáticos y técnicas de optimización para resolver problemas complejos. La IO se ha aplicado al control de parásitos para desarrollar programas que sean más eficientes y eficaces.

1.3.1. Modelos de IO para el control de parásitos

Los modelos de IO para el control de parásitos se centran en la optimización de una o más de las siguientes variables:

- La cantidad de parásitos que se eliminan: El objetivo es reducir la población de parásitos a un nivel aceptable (Adhikari & Dandekar, 2012).
- El costo del control: El objetivo es minimizar el costo de las medidas de control (Bhatt, Das, & Sundaram, 2011).
- El impacto ambiental: El objetivo es minimizar el impacto ambiental de las medidas de control.

Los modelos de IO se pueden utilizar para diseñar programas de control de parásitos para una amplia gama de organismos, incluyendo:

- Parásitos de animales: Las enfermedades parasitarias son una de las principales causas de mortalidad en los animales de granja. Los modelos de IO se han utilizado para desarrollar programas de control de parásitos para enfermedades como la tenía, la sarna y la malaria.
- Parásitos de plantas: Los parásitos de plantas pueden causar daños significativos a los cultivos. Los modelos de IO se han utilizado para desarrollar programas de control de parásitos para enfermedades como el tizón de la papa y la roya del trigo (García & García, 2015).
- Parásitos humanos: Las enfermedades parasitarias son una de las principales causas de morbilidad y mortalidad en todo el mundo. Los modelos de IO se han utilizado para desarrollar programas de control de parásitos para enfermedades como la malaria, la tuberculosis y la esquistosomiasis (O'Neill & Thomas, 2010).

Aplicaciones de IO en el control de parásitos

La IO se ha utilizado para desarrollar programas de control de parásitos en todo el mundo. Algunos ejemplos de aplicaciones destacadas incluyen:

- Programa de control de la malaria en África: La Organización Mundial de la Salud (OMS) utiliza un modelo de IO para optimizar la distribución de mosquiteros tratados con insecticida en África (World, 2016).
- Programa de control de la tuberculosis en China: El gobierno chino utiliza un modelo de IO para optimizar la asignación de recursos para el control de la tuberculosis. Programa de control de la esquistosomiasis en Brasil: El gobierno brasileño utiliza un modelo de IO para optimizar la distribución de medicamentos antiparasitarios para el control de la esquistosomiasis (Oliveira, Rocha, & Katz, 2010).
- La IO es una herramienta valiosa para el desarrollo de programas óptimos de control de parásitos. Los modelos de IO pueden ayudar a los responsables de la salud a reducir la carga de las enfermedades parasitarias y mejorar la salud humana y animal.

1.4. Protección forestal

La Investigación de Operaciones (IO) presenta los fundamentos adecuados para resolver problemas de organizaciones complejas, siendo un soporte que contribuye a la toma de decisiones que conducen a un fin lo más favorable posible para el sistema.

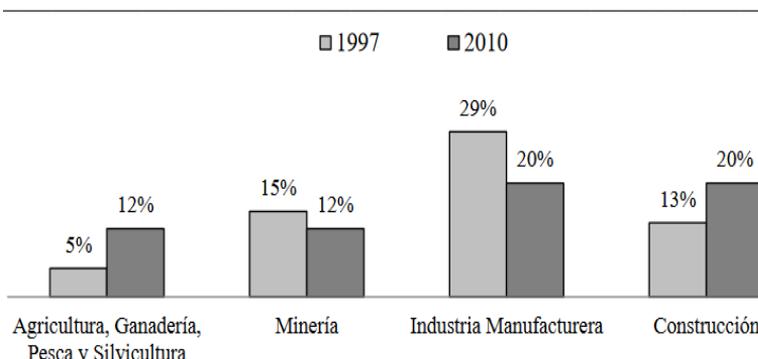
El sector forestal se caracteriza por la multi-dimensionalidad de sus sistemas, desde la gestión de las masas hasta aspectos de logística y aprovechamiento de los recursos forestales. Bajo este contexto la IO es el enfoque versátil y robusto para abordar los problemas de dichos sistemas. A partir de un análisis contextual se concluye que la IO es una herramienta de gran utilidad para el ingeniero forestal, lo cual fundamenta la incorporación de la asignatura en el plan de estudio de la carrera (Broz, Mac Donagh, Arce, & Yapura, 2017).

Según Cañete (2011) en Argentina el 84% de la mercadería se traslada por camión, esto implica que ocho de cada diez productos de cualquier rama de actividad, utiliza a lo largo de su cadena de valor al menos dos veces el camión. Por este motivo, el mismo autor expone que el costo de transportar un contenedor de 20' y 10t desde Singapur o Shangai a Buenos Aires (U\$D 1.800) es más económico que llevarlo desde Buenos Aires a Salta (U\$D 2.200).

En Argentina, el costo logístico sectorial es dispar, por un lado, en las actividades primarias como la agricultura, ganadería, pesca y silvicultura, este costo representa el 12% del valor agregado.

Por otro lado, en la construcción y en la industria manufacturera, esta incidencia es del orden del 20% (Figura 1.1).

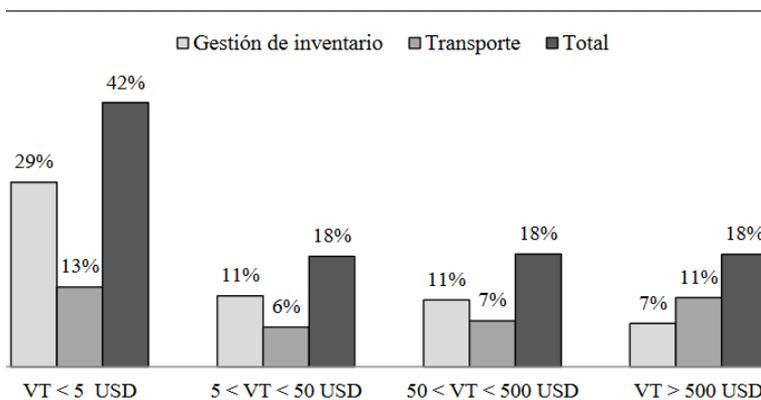
Figura 1.1. Industria facturera



Fuente: Broz, Mac Donagh, Arce, & Yapura, 2017

En relación con el costo logístico y el tamaño de las organizaciones, en la figura 1.2. se aprecia que los mismos representan un 42% de las ventas totales (VT) en las empresas de menor tamaño, de los cuales el 12,7% corresponde al transporte y distribución y el 29,4% al almacenamiento y gestión de inventarios. Por otro lado, para empresas con un nivel de ventas superiores a USD 5.000.000 anuales, los costos logísticos oscilan en torno a 18% (Broz, Mac Donagh, Arce, & Yapura, 2017).

Figura 1.2. Costo logístico y el tamaño de las organizaciones



Fuente: Broz, Mac Donagh, Arce, & Yapura, 2017

Para Meyer et al. (1961), el manejo forestal es el arte y la técnica que permite organizar la producción forestal con una base de rendimiento continuo.

1.4.1. Planificación forestal

La planificación forestal se divide en niveles; en el nivel más alto de la jerarquía se encuentran los procesos de planificación estratégica, con un horizonte de planificación superior a 30 años.

En ésta, se fijan los objetivos a largo plazo y se definen las condiciones bajo las cuales se debe operar. Se definen como decisiones estratégicas: políticas globales de manejo, definición de capacidad de producción, selección de productos finales, adquisición de recursos, entre otras.

Por otro lado, la planificación táctica, definida en un horizonte entre 3 a 10 años, busca programar las operaciones de cosecha, especificando áreas en una escala de tiempo más fina. Son decisiones tácticas: lugar y momento de aplicación de los tratamientos silvícolas, la construcción de caminos forestales y/o mantenimiento de las vías existentes, entre otras.

Finalmente, en la planificación operativa se definen programas a corto plazo, generalmente menor a 3 años. Se define como decisiones operativas: la planificación de las siembras y plantaciones, el transporte forestal, la selección y localización de maquinaria de cosecha, la organización del capital humano, los arreglos de caminos, entre otras (Broz, 2015; Bettinger et al., 2009) citados por (Broz, Mac Donagh, Arce, & Yapura, 2017).

En la actualidad existe una gama de desarrollos que apuntan a abordar distintos problemas de gestión forestal. Dentro de las primeras aplicaciones de IO en la temática podemos mencionar a Gilmore y Gomory (1961), quienes aplican Programación Lineal (PL) para resolver problemas de trozado de fustes o cutting stock problem. Curtis (1962) propone un modelo de PL para la gestión de propiedades forestales.

Johnson y Scheurman (1977) sintetizan y analizan en su trabajo dos modelos de gestión, denominado Modelos Tipo I y II, que sientan la base del ordenamiento sustentable. Barros y Weintraub (1982) desarrollan un modelo de planeamiento para industrias verticales demostrando la necesidad de que las áreas de producción de madera sean divididas en clases o áreas con propiedades uniformes.

Dentro de las aplicaciones más recientes podemos mencionar, por ejemplo, a Díaz-Balteiro et al. (2009), quienes plantean un modelo de planificación de la cosecha, mediante programación por metas, en plantaciones de *Eucalyptus globulus* Labill en Galicia, España. En este caso en particular, los autores utilizan el modelo tipo II propuesto por Johnson Y Scheurman (1977), el cual supone igual productividad en todos los rodales ya que admite una sola función de crecimiento para todo el sistema.

Por su parte, Verdín et al. (2009) proponen una metodología para analizar y resolver un problema forestal que involucra el manejo de varios bienes y servicios del bosque en una propiedad pública en México. Para esto, los autores tomaron en cuenta la opinión de

productores y técnicos forestales para construir funciones de respuesta para diez objetivos.

Mediante programación por compromiso determinaron la mejor combinación de esas variables. Aldea et al. (2014) proponen un procedimiento para la integración de varios servicios ecosistémicos en la gestión forestal multicriterio. Los criterios seleccionados para el modelo son: producción de madera, producción de hongos silvestres comestibles, captura de carbono, valor presente neto de la inversión y, finalmente, la sostenibilidad del manejo forestal definido por un bosque normal.

Giménez et al. (2013) proponen un método secuencial basado en programación por metas extendida para el manejo de plantaciones con fines industriales de *Eucalyptus globulus* Labill. Se definieron como metas el VAN, volumen de madera cosechada y la captura neta de carbono. En este caso se generan varias alternativas de manejo y posteriormente se establece un ranking de acuerdo a la sostenibilidad de alternativa. Méndez (2013) formula un modelo de optimización multiobjetivo en el cual incluye la producción maderera y el secuestro de carbono para una plantación de teca (*Tectona grandis* L.).

El resultado es un plan de cortas que indica cuáles rodales deben aplicarse y a qué intensidad en cada período. Debido a la complejidad y uso de relaciones no lineales, se deben utilizar meta-heurísticos como Algoritmos Genéticos y Simulated Annealing (Broz, Mac Donagh, Arce, & Yapura, 2017).

Otra herramienta de mucha utilidad es la simulación estocástica a través del Método Montecarlo (Hillier y Lieberman, 2010). Este es un método estadístico-numérico utilizado para evaluar expresiones matemáticas que son complejas y costosas de llevar a cabo mediante métodos analíticos, como por ejemplo el Algoritmo Simplex.

Acuña y Drake (2003) aplican el MC para analizar el riesgo de una inversión forestal debido a que consideran que las decisiones basadas en escenario determinista son poco realistas. Estos autores consideran como factores de riesgo el precio de los productos, la tasa de descuento y los costos.

Del Río et al. (2003) utiliza el MC para estudiar los índices de diversidad estructural en las masas forestales. Rodríguez y Díaz-Balteiro (2006) utilizan técnicas como la programación dinámica y la simulación Montecarlo para optimizar tanto la duración como el número de rebrotes en plantaciones de *Eucalyptus spp* en base a distintos contextos.

Si bien se puso en relieve el rol de la IO en la logística y planificación forestal, bajo distintos enfoques, especies y contextos, existe un sinnúmero de aplicaciones en otros sectores de la cadena de valor que vale la pena mencionar.

Por ejemplo, Maness y Norton (2002) describen un sistema de planificación para múltiples productos con valores y demanda fluctuante, por medio del cual establece políticas óptimas de gestión de un aserradero. Gaudreault et al. (2010) presentan una herramienta de gestión para un aserradero, definiendo un programa de producción que

minimiza la acumulación de stock y penaliza las demoras en satisfacer pedidos.

El programa optimiza el aprovechamiento de las cámaras de secado y minimiza los costos de acabado de productos terminados. Benali et al. (2014) proponen una herramienta para la gestión de la cadena de valor de los productos forestales que integra las operaciones y las ventas en función a los precios y las demandas estacionales. Bajgiran et al. (2014) desarrolla una herramienta, con base en programación mixta-entera, para mejorar la cadena de valor de la madera, desde la compra de rollos, el envío a las plantas, el proceso de aserrío y la distribución en el mercado por los distintos canales.

El objetivo es establecer un plan integral que minimice los pedidos atrasados y los costos totales. Varas et al. (2014) proponen un modelo de optimización robusto, basado en el modelo determinístico de Maturana et al. (2010), para la planificación de la producción de un aserradero en donde hay incertidumbre en los niveles de suministro de troncos y de la demanda de los productos terminados.

Rafiei et al. (2015) plantean un modelo numérico para la planificación de una planta de remanufactura de madera, en la que hay incertidumbre sobre la demanda, y en la que los tiempos de preparación dependen de la capacidad y de la secuencia de producción. El propósito es incrementar el nivel de servicio y mantener los niveles de stock en un tamaño razonable. Troncoso Matamoros (2015) propone una herramienta que permite optimizar la utilización de la materia prima y la capacidad instalada en las plantas de producción.

Para esto el autor propone implementar una herramienta que incorpore una lógica de negocio a través de programación matemática, para apoyar la toma de decisiones en el proceso, acompañado de un rediseño que mejore la coordinación entre los distintos actores involucrados e inserte la herramienta en la arquitectura de procesos de la empresa.

Finalmente, dentro del campo de la simulación dinámica, Woitschach (2014) utiliza una herramienta, con base en Visual Interactive Modelling Simulation (VIMS), para determinar la utilización de las máquinas principales en un aserradero en orden a incrementar la eficiencia de los sistemas de producción (Broz, Mac Donagh, Arce, & Yapura, 2017).

Con las herramientas que integran la IO es posible abordar todo tipo de problema, desde aspectos macro como un ecosistema hasta aspectos micro como procesos biológicos, en donde intervienen microorganismos como bacterias y virus. Con el fin de ilustrar esto podemos mencionar, por ejemplo, el trabajo de Senante et al. (2013), el cual se plantea un modelo de optimización para la gestión de recursos hídricos en cuencas deficitarias integrando múltiples ofertas, múltiples demandas de agua y las conexiones físicas correspondientes.

Integración de aspectos de IO y gestión de cuencas hídricas podemos encontrar en Duan et al. (1994), Srivastava et al. (2002), Srivastava et al. (2003), entre otros. Debido al carácter multidimensional de los sistemas, ya sea un ecosistema, bioma, comunidad, o cuenca hidrográfica, las técnicas multicriterio suelen ser las más recomendadas debido a la flexibilidad de incorporar varios objetivos.

Para Meza-Rodríguez et al. (2011) y Ruiz y Abarzúa (2010) las técnicas multicriterio son una herramienta para la solución de los problemas espaciales complejos ya que facilita la obtención, gestión, manipulación, análisis, modelado, representación y salida de información, siendo un instrumento versátil y potente para resolver problemas complejos del territorio.

1.4.2. Marco para la Evaluación de Sistemas de Manejo

En la actualidad existe una gama de paquetes libres y comerciales que sirven de apoyo a las distintas instituciones para establecer políticas o planes de gestión a nivel comunitaria o territorial. El Marco para la Evaluación de Sistemas de Manejo de recursos naturales incorporando Indicadores de Sustentabilidad (conocido como MESMIS3) es una herramienta de este tipo.

MESMIS ayuda a evaluar la sustentabilidad de sistemas de manejo de recursos naturales, con énfasis en el contexto de los productores campesinos y en el ámbito local, desde la parcela hasta la comunidad, integrando desde aspectos económicos hasta ambientales. En Rönnqvist et al. (2015) se presenta la contribución y aplicación de la IO en el sector forestal a partir de un análisis de 33 problemas típicos del sector, desde manejo forestal, cadena de suministros, modelos multiobjetivo, enfoques determinísticos y estocásticos.

Esta lectura permite contemplar aspectos que escapan de este artículo y enriquecen al lector dando una visión holística sobre el potencial de la herramienta y, en consecuencia, la necesidad de un desarrollo a nivel local (Broz, Mac Donagh, Arce, & Yapura, 2017).

El ingeniero forestal tiene como campo de acción la gestión de sistemas complejos como plantaciones forestales con fines industriales, bosques nativos, operaciones de cosecha, industrias forestales, cuencas hidrográficas, entre otros. En los mismos es imposible tomar buenas decisiones sin tener en cuenta los principales aspectos que lo gobiernan.

Para lograr esto, se debe abstraer o simplificar el sistema mediante un modelo matemático y de esta manera reducir el sistema real a un número finito de factores. Esto permite al profesional forestal experimentar sobre el sistema abstracto y tomar la mejor decisión posible. Es importante recalcar que la IO no busca reemplazar al profesional, sino apoyar su decisión en un marco científico, minimizando el “arte” en la toma de decisión.

La IO brinda las herramientas para la toma de decisiones en diferentes áreas de la ingeniería forestal, como ser: cosecha forestal, ordenamiento forestal, economía forestal, administración forestal, ordenamiento de cuencas hidrográficas, protección forestal, silvicultura, industrias forestales, entre otras. Además, aspectos de la IO como la optimización lineal, no lineal, mixta-entera y algoritmia dan pie a abordajes particulares en áreas como ecología, planificación del paisaje y procesos biológicos, entre otros (Broz, Mac Donagh, Arce, & Yapura, 2017).

No obstante, los procesos de deterioro de los ecosistemas forestales tienen consecuencias ambientales y sociales que impactan de manera negativa en la sociedad. Los servicios ecosistémicos que sustentan el bienestar de la sociedad se ven mermados con el aumento de las emisiones por deforestación y degradación de los bosques, la

disminución de la captura de gases de efecto invernadero (GEI), la sedimentación de ríos, los azolves en obras hidráulicas y cuerpos de agua, el incremento de la erosión y desertificación, la pérdida de fertilidad de terrenos agropecuarios, el aumento en la vulnerabilidad de los bosques, y la pérdida de la biodiversidad.

A su vez, estos procesos ocasionan la pérdida de la capacidad para producir alimentos, la pérdida de oportunidades económicas y productivas, la pérdida de empleos, y la intensificación de los efectos del cambio climático al tiempo que limitan la capacidad de adaptación frente a éste.

Una de las principales causas de degradación y pérdida de estos ecosistemas, es la afectación por plagas forestales; si bien es cierto que en este proceso intervienen factores que no pueden ser controlados por el hombre, se debe reconocer que la capacidad de atención para proteger la superficie forestal nacional no ha sido suficiente, por lo que es necesario replantear y fortalecer estrategias que permitan la detección temprana y atención oportuna de plagas forestales (SEMARNAT & CONAFOR, 2019).

Aunado a lo anterior, las condiciones climáticas preponderantes para la presencia de plagas y los factores de estrés de los ecosistemas, han propiciado que durante el periodo de 2010 a 2019 se tenga registrada una superficie promedio anual afectada de 148,163 Ha en México. En este mismo periodo, los principales agentes causales de daño han sido, insectos descortezadores (51.35%), plantas parásitas (24.73%), insectos defoliadores (16.14%), otros agentes (3.84%, ácaro rojo, avispa

agalladora, chinche de pino, chupadores, plantas trepadoras y termitas), enfermedades (2.39%) e insectos barrenadores (1.55%).

Las plagas forestales tanto nativas o exóticas, representan una de las mayores amenazas para los bosques, y su incidencia está fuertemente ligada a los cambios en el clima, que influye en la composición, estructura y dinámica de los ecosistemas forestales, facilitando su establecimiento y propagación.

También, se tiene una relación intrínseca con otras alteraciones derivadas del comportamiento climático, como son los incendios forestales, las sequías, huracanes, granizadas, etc., que deterioran los bosques, dejándolos vulnerables a la presencia de plagas.

Con base en el artículo 115 de la LGDFS, la Comisión, las Entidades Federativas, Municipios y Demarcaciones Territoriales de la Ciudad de México, los dueños y poseedores de terrenos forestales son los obligados en atender los problemas de plagas forestales en sus predios desde su detección hasta realizar las acciones de tratamiento fitosanitario (SEMARNAT & CONAFOR, 2019).

1.5. Programación dinámica

La Programación Dinámica (*Dynamic Programming*, DP) es un método de optimización; es decir, un método usando ecuaciones matemáticas y algoritmos para resolver problemas con el propósito de encontrar la mejor solución posible entre todas las soluciones viables. Este método fue inventado en 1953 por el matemático Richard Bellman.

La DP inicialmente se desarrolló para la resolución de problemas en procesos de decisión en múltiples pasos, pero las mismas ideas pueden utilizarse en otros tipos de problemas de matemática aplicada o para el planteo de algunas cuestiones teóricas.

La idea de Bellman sobre la teoría de programación dinámica se basa en una estructura de optimización, que consiste en descomponer el problema en subproblemas con resolución más asequible. Los cálculos se realizan recursivamente, usando la solución óptima de un subproblema como dato de entrada del siguiente.

Por lo cual, se entiende que el problema es solucionado en su totalidad una vez se haya solucionado el último subproblema. Dentro de esta teoría, Bellman desarrolla el Principio de Optimalidad, del que más tarde hablaremos, que es fundamental para la resolución adecuada de los cálculos recursivos.

Es por ello, que se define a la programación dinámica como una técnica matemática que ayuda a resolver decisiones secuenciales interrelacionadas, combinándolas para obtener la solución óptima. Existen dos enfoques en la Programación Dinámica (Rosell, 2022):

- **Determinista:** Consiste en que el estado de la siguiente etapa se encuentra determinado por completo con respecto al estado y la decisión que posee la etapa actual.
- **Estocástica:** El estado de la siguiente etapa y estrategia de decisión queda completamente determinado mediante una distribución de probabilidad.

Richard Ernest Bellman fue un matemático aplicado, cuya mayor contribución fue la metodología denominada programación dinámica, inventada en 1953. Nació el 26 de agosto de 1920 en Brooklyn (Estados Unidos) y murió el 19 de marzo de 1984 en Los Ángeles.

La ecuación de Bellman, también conocida como la ecuación de la programación dinámica, es una condición necesaria para la optimalidad asociada con el método de optimización matemática conocido como la programación dinámica. Casi cualquier problema que se pueda resolver utilizando la teoría de control óptimo también se puede resolver mediante el análisis de la correspondiente ecuación de Bellman.

Esta ecuación se aplicó por primera vez a la teoría de la ingeniería de control y otros campos de la matemática aplicada, y posteriormente se convirtió en una herramienta importante en la teoría económica.

Otro resultado importante en la programación dinámica y que también fue desarrollado por Richard Bellman, con compañeros de trabajo, fue la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Esta ecuación es una ecuación diferencial parcial que es fundamental para la teoría de control óptimo.

Según (Rosell, 2022), cuando un agente se enfrenta a un problema, lo hace mediante la toma de decisiones, escogiendo acciones. Su objetivo es elegir una secuencia de acciones que haga que el sistema funcione de manera óptima con respecto a algún criterio de rendimiento predeterminado. Las decisiones que se toman deben estar bien analizadas ya que hay que anticipar las oportunidades y los costes (o recompensas) asociados a los estados de futuras etapas.

Definición. *Los instantes de decisión son los puntos en el tiempo en que se toman decisiones. Denotamos a este conjunto como T .*

Podemos clasificar este conjunto T de dos formas:

- Conjunto discreto.

El agente toma decisiones en cada uno de los instantes $t \in T$. En cambio, cuando es un conjunto continuo, las decisiones se toman en puntos aleatorios del tiempo cuando ocurren determinados eventos o en instantes de tiempo elegidos por el agente. Con esto podemos formular modelos en los que un instante de decisión corresponde al inicio de una etapa, y cada etapa viene definida por una serie de elementos (estado, acción, recompensa...) que a continuación definiremos. En el caso discreto, el conjunto de decisiones puede ser finito ($T = \{1, 2, \dots, T\}$ con $T < \infty$) o infinito ($T = \mathbb{N}$). En el caso continuo T es un intervalo $T = [0, T]$ o $T = [0, \infty[$.

- Conjunto continuo.

No obstante, es importante definir los siguientes conceptos (Rosell, 2022):

✓ *Estado:* Es la representación de una etapa en un momento determinado; es decir, de qué información disponemos y en qué situación nos encontramos. Usaremos S para denotar el estado general, S para denotar conjuntos de valores que puede tomar S y $s \in S$ para un estado específico. A veces usaremos s_0 para

referirnos al siguiente estado y s' para referirnos a un estado en un tiempo concreto.

✓ *Acción:* En un instante de decisión concreto, el agente observa el sistema en un estado $s \in S$ y escoge una acción a del conjunto de acciones permisibles en el estado s , que denotamos A_s . Usamos A para referirnos al conjunto general de acciones; entonces, A toma valores en $\bigcup_{s \in S} A_s$. Igual que antes, usaremos a' para referirnos a la siguiente acción y cuando queremos enfatizar en qué tiempo es tomada la acción, escribiremos a_t . Observamos que ejecutar una cierta acción no siempre garantiza el estado en el que acabaremos.

Los conjuntos S y A_s pueden ser:

- Conjuntos finitos arbitrarios.
- Conjuntos contables infinitos arbitrarios.
- Subconjuntos compactos de espacios euclidianos de dimensión finita
- Subconjuntos no vacíos de Borel; es decir, subconjuntos obtenidos mediante uniones e intersecciones numerables, de espacios métricos completos y separables.

Cuando el agente realiza una acción puede recibir una recompensa (beneficio a su favor) o una penalización. Esta recompensa es un resultado de elegir la acción $a \in A$, en el estado $s \in S$, en el instante de decisión $t \in T$.

Por tanto, escribiremos $R := R_t(S, A)$. Si el valor de R es positivo, lo tomamos como una recompensa que nos beneficia y cuando es negativo, como un coste; es decir, una recompensa que nos perjudica. Cada proceso es diferente, pero observamos que las recompensas normalmente se reciben al analizar cada etapa; es decir, después de cada decisión.

Solo se requiere que se conozca su valor o su valor esperado antes de elegir una acción, y que no se vea afectado por acciones futuras. La recompensa puede ser (Rosell, 2022):

- Una suma global recibida en un momento fijo o aleatorio antes del siguiente instante de decisión.
- Acumulado de forma continua a lo largo del periodo actual.
- Una cantidad aleatoria que depende del estado del sistema en el instante de decisión posterior.
- Una combinación de las anteriores.

También, podemos escribir:

$$R_{ss'}^a := \mathbb{E}[R_{t+1} \mid S_t = s, A_t = a, S_{t+1} = s']$$

Es decir, la recompensa esperada sabiendo el estado actual y el siguiente, y la acción que realizamos. Definimos el retorno como el total de las recompensas que nos esperan.

El objetivo del agente es maximizar la recompensa total; es decir, el retorno G_t , que en el caso más simple es $G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1}$ cuando T es finito.

Pero si no tenemos punto terminal, la fórmula de arriba presenta problemas, ya que no podemos hacer el cálculo cuando $T = 1$. Podemos usar entonces la forma alternativa donde se van haciendo cada vez más pequeñas las contribuciones de las recompensas más lejanas (Rosell, 2022):

$$G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1}$$

En esta fórmula el parámetro $\gamma \in [0,1]$ se conoce como *razón de descuento* y se usa para representar que cuanto antes recibimos la recompensa, más valor tiene.

Además, existen diferentes tipos de modelos, dependiendo de lo que buscamos optimizar, suponiendo de momento que T es discreto (Rosell, 2022):

- *Modelo de horizonte finito*: el agente trata de optimizar su recompensa esperada en los siguientes T instantes de decisión, sin preocuparse de lo que pueda ocurrir después:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{t=0}^T R_t \right)$$

- *Modelo de horizonte infinito*: las recompensas que recibe el agente son reducidas geoméricamente de acuerdo al factor de descuento $\gamma \in [0,1]$, pudiendo considerar así un número infinito de pasos:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t R_t \right)$$

- *Modelo con recompensa promedio*: el agente optimiza a largo plazo la recompensa promedio:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\left(\frac{1}{T} \right) \sum_{t=0}^T R_t \right)$$

Por último, definimos dos conceptos más que tienen mucha relación con el concepto de recompensa.

- *Función valor*: Es una función que mide cómo de buena o mala es una acción o un estado. Si nos encontramos en un cierto estado y todos los estados futuros son buenos; entonces, el valor en nuestro estado actual será alto. Este valor depende de qué acciones tomamos en el presente y en el futuro. El valor viene dado por la acumulación de recompensas y presenta cómo de buena es nuestra posición actual dada la acción que tomamos ahora y en el futuro. Más adelante definiremos formalmente dos tipos de función valor: función valor del estado y función valor de la acción.
- *Probabilidad de transición*: Es la probabilidad que determina el estado del sistema en el instante de decisión siguiente al actual; es decir, la probabilidad de ir de un estado s al estado s' después de tomar una acción a . Por tanto, podemos escribir esta probabilidad como:

$$P_{ss'}^a := \mathbb{P}(S_{t+1} = s' \mid S_t = s, A_t = a)$$

CAPÍTULO II

OPTIMIZACIÓN Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS

2.1. Regla de decisión

Una regla de decisión es un procedimiento que sirve para seleccionar una acción en cada estado en un instante de decisión específico. Es una función $d_t = S \rightarrow A$ que especifica qué acción tomar cuando el sistema ocupa un estado s en el instante de decisión t . Para cada estado $s \in S$ tenemos una norma de decisión $d_t(s) \in A_s$.

Denotamos al conjunto de reglas de decisión en un tiempo t como D_t . Estas reglas de decisión pueden ser Markovianas o dependientes de la historia del proceso, y deterministas o aleatorias (Rosell, 2022).

- Markovianas: Cuando la regla de decisión depende de los estados y acciones anteriores, pero solo a través del actual estado del sistema; es decir, sin importar cómo se ha llegado al estado actual.
 - ✓ Deterministas (D_t^{MD}): Cuando la decisión se basa en elegir una acción con certeza; es decir, $d_t(s_t) \in A_{s_t}$.
 - ✓ Aleatorias (D_t^{MA}): Cuando la decisión se basa en especificar una distribución de probabilidad $p(\cdot | s_t)$ en el conjunto de acciones. Por tanto, $p(\cdot | s_t) \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(A_{s_t})$, donde $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ denota las medidas de probabilidad, en este caso en A_{s_t} .
- No Markovianas: Cuando la regla de decisión depende de toda la historia del proceso; es decir, de la secuencia de estados y acciones previas. En este caso, la función d_t es una función del historial $h_t =$

$(s_1, a_1, \dots, s_{t-1}, a_{t-1}, s_t)$, donde s_i y a_i denotan el estado y la acción del sistema en el instante de decisión i .

- ✓ **Deterministas (D_t^{MD}):** Cuando la decisión se basa en elegir una acción con certeza; es decir, $d_t(h_t) \in A_{st}$.
- ✓ **Aleatorias (D_t^{MA}):** Cuando la decisión se basa en especificar una distribución de probabilidad $p(\cdot | h_t)$ en el conjunto de acciones A_{st} . En este caso, $p(\cdot | h_t)$ en el conjunto de acciones A_{st} . En este caso, $p(\cdot | h_t) \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(A_{st})$.

A partir de ahora nos centraremos en las Markovianas, tanto deterministas como aleatorias. Una *estrategia* específica que regla de decisión debemos tomar en cada instante de decisión; es decir, provee al agente de un procedimiento para seleccionar una acción bajo cualquier estado futuro. Formalmente (Rosell, 2022):

Definición. Una estrategia π es una secuencia de reglas de decisión $\pi = (d_1, d_2, \dots, d_T)$ donde $d_t \in D_t$ para $t = 1, 2, \dots, T$.

Las estrategias, igual que las reglas de decisión, pueden ser deterministas o aleatorias, y Markovianas o no Markovianas. Las estrategias también pueden ser estacionarias o no-estacionarias. Una estrategia estacionaria decide la misma acción para cada estado independientemente del tiempo; esto es, $a_t(s) = a(s)$ para toda $t \in T$; que no se cumple para una no-estacionaria.

Cuando un agente se enfrenta a un problema de toma de decisiones bajo incertidumbre y con información limitada del ambiente, éste debe tomar la mejor decisión de acuerdo con sus objetivos. Muchas veces este proceso se repite de forma secuencial en el tiempo, de forma que en cada

instante t el agente recibe información y decide qué acción tomar. A estos problemas se los denomina problemas de decisión secuencial. Aquí es donde entran los Procesos de Decisión Markovianos, que son modelos para la toma de decisiones en este tipo de problemas; es decir, cuando se dispone de información limitada.

Definición. *Un proceso de Decisión Markoviano (Markov decision process, MDP) es un conjunto $\langle S, A, R, P \rangle$, donde cada uno de los elementos son:*

- *Un conjunto finito de estados $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, donde s_t denota el estado $s \in S$ en el instante t .*
- *Un conjunto de acciones A , que consideramos también finito. Para cada $s \in S$, tenemos $A(s) \subseteq A$, con $A(s) = \{a_1(s), a_2(s), \dots, a_n(s)\}$, donde $a_t(s)$ denota la acción realizada en un estado s en el instante t .*
- *Una función de recompensa R que devuelve la recompensa recibida en cada estado $s' \in S$ dado que en el estado anterior $s \in S$ se realiza la acción $a \in A(s)$.*
- *Una probabilidad de transición P que devuelve la probabilidad de llegar a cada estado $s' \in S$ dado que se tomó la acción $a \in A(s)$ en $s \in S$.*

Las acciones del agente determinan no sólo la recompensa inmediata, sino también la probabilidad del siguiente estado. En los MDP, los procesos son markovianos tal y como su nombre indica; esto significa que el siguiente estado es independiente de los estados anteriores una vez se ha fijado el estado actual y la acción que se toma. Por tanto, no

tiene importancia cómo hemos llegado al estado en el que nos encontramos, sino solo la información que disponemos del estado actual y la acción que tomamos. Podemos escribir esto formalmente como (Rosell, 2022):

$$\begin{aligned} P_{ss'}^a &= \mathbb{P}(S_{t+1} = s' \mid S_t = s_t, A_t = a_t, S_{t-1} = s_{t-1}, A_{t-1} = a_{t-1}, \dots) \\ &= \mathbb{P}(S_{t+1} = s' \mid S_t = s_t, A_t = a_t) \end{aligned}$$

El problema fundamental en un MDP es encontrar una estrategia óptima π^* ; es decir, aquella que maximiza la recompensa que espera recibir el agente a largo plazo.

Respecto a las ecuaciones de Bellman presentaremos las funciones valor y desarrollaremos las ecuaciones de Bellman, que son elementos fundamentales para los algoritmos de la programación dinámica para encontrar y comparar estrategias para los agentes. El objetivo principal es encontrar una estrategia óptima para cada estado. Cuando tratamos con MDPs, en programación dinámica se consideran dos tipos de problemas diferentes:

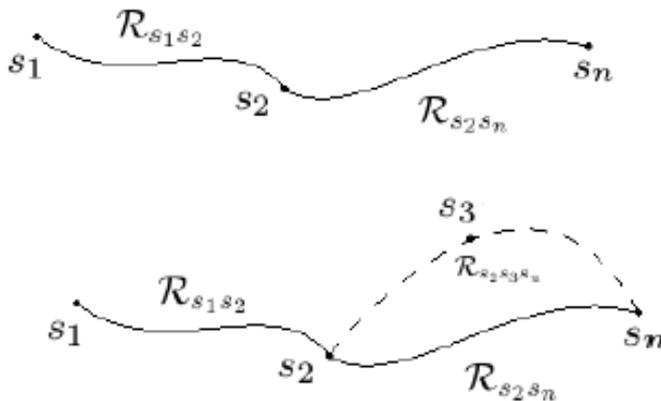
- *Predicción*: Consiste en encontrar la función valor del estado o de la acción, que a continuación detallaremos, para una estrategia dada. Este problema se conoce típicamente como evaluación de la estrategia (*policy evaluation*) ya que la función valor nos diría cómo de buena es una estrategia (en términos de la recompensa acumulada esperada).
- *Control*: consiste en encontrar la estrategia óptima; es decir, la estrategia que lleva a la función valor óptima.

2.2. Principio de Optimalidad de Bellman

El Principio de Optimalidad de Bellman supone que el agente se enfrenta a un problema de toma de decisiones.

Como vemos en la siguiente figura, el agente se encuentra inicialmente en un estado s_1 :

Figura 2.1. Principio de Optimalidad de Bellman



Fuente: Rosell, 2022

Toma la primera decisión; es decir, la acción $a(s_1)$, que resulta en el segmento $s_1 - s_2$ con una recompensa de $R_{s_1s_2}$. Las decisiones restantes dan lugar al segmento $s_2 - s_n$ con recompensa $R_{s_2s_n}$. La recompensa máxima para ir de s_1 a s_n es (Rosell, 2022):

$$R_{s_1s_n}^* = R_{s_1s_2} \times R_{s_2s_n}$$

Donde ' \times ' indica la operación mediante la cual se acumulan las recompensas; es decir, las recompensas se pueden acumular de forma aditiva, multiplicativa, etc.

Afirmación. Si $s_1 - s_2 - s_n$ es el camino óptimo de s_1 a s_n ; es decir, si son los estados por los que debemos pasar para ir de s_1 a s_n para obtener la recompensa máxima; entonces, $s_2 - s_n$ es el camino óptimo de s_2 a s_n . *Demostración.* Por contradicción. Suponemos que $s_2 - s_3 - s_n$ es el camino óptimo de s_2 a s_n . Entonces, la recompensa de este será mayor que cualquier otro camino entre estos dos estados:

$$R_{s_2 s_3 s_n} > R_{s_2 s_n} \Rightarrow R_{s_1 s_2} \times R_{s_2 s_3 s_n} > R_{s_1 s_2} \times R_{s_2 s_n} = R_{s_1 s_n}^*$$

Pero esto contradice la condición de que $s_1 - s_2 - s_n$ es el camino óptimo de s_1 a s_n . Esta propiedad que acabamos de demostrar es la que Bellman usa para exponer su principio de optimalidad, que es el siguiente (Rosell, 2022).

Una estrategia óptima tiene la propiedad de que cualesquiera sean el estado y la decisión iniciales, las decisiones siguientes constituyen una estrategia óptima con respecto al estado de la primera decisión. Es decir, buscamos un óptimo fijadas las condiciones anteriores.

Observamos que para procesos que no son Markovianos; es decir, aquellos en los que las recompensas y la dinámica dependen no solo del estado actual, sino de la historia previa, las técnicas de solución desarrolladas para MDP no se pueden aplicar directamente y el problema es más complejo.

Para estos casos, se pueden usar variables temporales para especificar la dependencia de la historia, y, agregando las variables adecuadas, se puede convertir en un MDP equivalente.

2.3. Programación Dinámica Determista

En la programación dinámica determista, los modelos deterministas son aquellos donde se supone que los datos se conocen con certeza; es decir, se supone que cuando el modelo sea analizado se tiene disponible toda la información necesaria para la toma de decisiones. En nuestro caso, usaremos programación dinámica determinista cuando, sabiendo el estado y la decisión que posee la etapa actual, podemos determinar por completo la siguiente etapa.

Los modelos de programación dinámica determinista (PDD) constituyen una clase importante de Procesos de Decisión Markovianos y que es ampliamente estudiada. Las aplicaciones incluyen encontrar la ruta más corta en una red o en un control de inventario con demandas conocidas.

En modelos PDD, cuando elegimos una acción $a \in A$, ésta determina el siguiente estado $s' \in S$ con certeza. Las formulaciones estándar tienen esto en cuenta mediante el uso de una función de transición de estado determinista, en lugar de una probabilidad de transición, para especificar el siguiente estado.

Definición. *Una función de transición de estado determinista es una función $f(s, a): S \times A_s \rightarrow S$ que especifica el estado del sistema a tiempo $t + 1$ cuando el agente elige la acción $a \in A_s$ en el estado s a tiempo t .*

Para formular un modelo PDD como un Proceso de Decisión Markoviano, definimos la probabilidad de transición como (Rosell, 2022):

$$P_{ss'}^a = \begin{cases} 1 & \text{si } f(s, a) = s' \\ 0 & \text{si } f(s, a) \neq s' \end{cases}$$

Antes de adentrarnos en buscar métodos analíticos y desarrollar ecuaciones explícitas para resolver el problema de encontrar una estrategia óptima, vamos a describir las bases cuando nos encontramos en el caso de programación dinámica determinista discreta (Rosell, 2022):

- Asumimos que el tiempo evoluciona de forma discreta. Esto significa que $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$; es decir, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- En cada instante t tenemos dos variables: un estado s_t que observa el agente y la acción que realiza a_t .
- Después de realizar cada acción, el agente recibe una recompensa $R(s_t, a_t)$ que depende del estado del proceso y de la acción tomada.
- Sabemos el valor inicial de la variable estado s_0 y también sabemos cuál es la función de transición $f(s, a)$, que nos indica el siguiente estado dados el estado y la acción a tiempo t , $(f(s_t, a_t) = s_{t+1})$.
- Asumimos que tanto el conjunto de estados \mathcal{S} como el conjunto de acciones \mathcal{A} son conjuntos finitos.
- Para cualquier secuencia de acciones $a \equiv \{a_0, a_1, \dots, \}$ con $a_t \in \mathcal{A}$, el proceso puede derivar en una gran cantidad de caminos factibles; es decir, en muchas secuencias de estados $a \equiv \{s_0, s_1, \dots, \}$ donde $s_{t+1} = f(s_t, a_t)$ con $a_t \in \mathcal{A}$.

- La acción que toma el agente en cada estado viene dada por una estrategia π , y ésta da lugar a la función valor V , que nos da un criterio para evaluar todos los posibles recorridos que puede tomar nuestro problema.
- El objetivo es encontrar una estrategia óptima π^* que nos muestre cuál es la secuencia de acciones que debemos tomar para maximizar nuestra función valor: $a^* = \{a_0^*, a_1^*, \dots, \}$. Y estas acciones dan lugar al camino óptimo $s^* = \{s_0, s_1^*, s_2^*, \dots, \}$

El Principio de Optimalidad se puede expresar formalmente como hemos visto anteriormente en términos de la función valor V . Para cada instante t y estado s_t , vimos que el principio de Bellman implica que las funciones valor deben satisfacer las ecuaciones de Bellman para V y Q .

La ecuación de Bellman capta el problema esencial al que nos enfrentamos cuando el agente es dinámico y su objetivo es optimizar las recompensas en el futuro: la necesidad de equilibrar la recompensa inmediata $R(s_t, a_t)$ con el valor presente esperado de las recompensas futuras.

Dadas las funciones valor, las estrategias óptimas π^* simplemente son las soluciones a los problemas de optimización incorporados en la ecuación de Bellman. Nos podemos encontrar con un modelo que tenga un horizonte infinito ($T = \infty$) o un horizonte finito ($T < \infty$).

En cualquiera de los dos casos, el objetivo es maximizar el retorno, es decir la función valor (Rosell, 2022):

$$\sum_{t=0}^T \gamma^t R(s_t, a_t), 0 < \gamma < 1$$

Definición. *El problema de control óptimo (optimal control problem, OCP) se define como el problema que trata de encontrar la estrategia óptima $\{a_t^*, s_0\}_{t=0}^{\infty}$ que solucione $\max_{\{a_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^T \gamma^t R(s_t, a_t)$ tal que $a_t \in \mathcal{A}$ y $s_{t+1} = f(s_t, a_t)$, dado el estado inicial s_0 .*

Uno de los métodos para resolver este tipo de problemas es a través del principio de la programación dinámica (Principio de Optimalidad de Bellman), que recordamos decía: *"Dado el estado y la acción iniciales, y la acción al comienzo de cualquier instante, las decisiones siguientes constituyen una estrategia óptima con respecto al estado resultante"*. Siguiendo este principio, y según el tipo de horizonte, vamos a ver cómo resolvemos el problema.

2.4. Modelo de horizonte finito

En un modelo de horizonte finito, adoptamos el convenio de que el agente tiene que tomar una decisión para cada instante t , incluyendo la decisión final en el instante $T < \infty$. El agente no se enfrenta a decisiones después de t , pero sí que recibe una recompensa final $V_{T+1}(s_{T+1})$ en el periodo posterior que depende de la realización del estado en ese periodo. En muchas aplicaciones $V_{T+1}(s_{T+1})$ suele ser idénticamente cero, indicando que no se reciben recompensas después del instante de decisión final.

Vamos a suponer que conocemos la solución al problema de control óptimo $\{a_t^*, s_0, \}_{t=0}^\infty$. En este caso, podemos definir la función valor del estado a tiempo T como:

$$V_{T-t}(s_{Tr}) = \sum_{t=r}^T \gamma^{t-r} R(s_r, a_r^*)$$

Entonces, para $T = 0$ obtenemos (Rosell, 2022):

$$\begin{aligned} V_T(s_0) &= \max_{\{a_t\}_{t=0}^T} \sum_{t=0}^T \gamma^t R(s_t, a_t^*) \\ \square &= \max_{\{a_t\}_{t=0}^T} (R(s_0, a_0) + \gamma R(s_1, a_1) + \gamma^2 R(s_2, a_2) + \dots) \\ \square &= \max_{\{a_t\}_{t=0}^T} \left(R(s_0, a_0) + \gamma \sum_{t=1}^T \gamma^{t-1} R(s_t, a_t) \right) \end{aligned}$$

Aplicando el principio de optimalidad,

$$V_T(s_0) = \max_{a_0} \left(R(s_0, a_0) + \gamma \max_{\{a_t\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^T \gamma^{t-1} R(s_t, a_t) \right)$$

Y por la definición de $V_{T-t}(s_T)$, con $T = 1$ tenemos que:

$$V_T(s_0) = \max_{a_0} (R(s_0, a_0) + \gamma V_{T-1}(s_1))$$

Iterando, para cualquier instante $0 \leq t \leq T$, encontramos la Ecuación de Hamilton- Jacobi-Bellman (HJB):

$$V_{T-t}(s_t) = \max_{a_t} (R(s_t, a_t) + \gamma V_{T-t-1}(s_{t+1}))$$

Vemos que esta misma ecuación la podemos obtener de la ecuación de Bellman óptima para V , en $V_*(s) = \max_a \left(\sum_{s' \in \mathcal{S}} P_{ss'}^a \left(R_{ss'}^a + \gamma V_*(s') \right) \right)$.

La diferencia es que ahora estamos en un proceso discreto; por tanto, la probabilidad de transición es 1. Y, además, al estar en un proceso determinista, sabiendo el estado y acción actual, el siguiente estado está totalmente determinado. Es por esto que nos queda:

$$\begin{aligned} V_*(s_t) &= \max_a \left(\sum_{s_{t+1} \in \mathcal{S}} P_{s_t s_{t+1}}^a \left(R_{s_t s_{t+1}}^a + \gamma V_*(s_{t+1}) \right) \right) \Rightarrow V_{T-t}(s_t) \\ &= \max_{a_t} \left(R(s_t, a_t) + \gamma V_{T-t-1}(s_{t+1}) \right) \end{aligned}$$

Habiendo encontrado la ecuación de HJB en $V_{T-t}(s_t) = \max_{a_1} \left(R(s_t, a_t) + \gamma V_{T-t-1}(s_{t+1}) \right)$, tenemos la siguiente proposición:

Proposición. *Dada una solución óptima al problema de control óptimo; entonces, ésta verifica la ecuación HJB.*

Entonces, resolvemos el problema de control óptimo a través de la recursión que obtenemos directamente de la ecuación de HJB (donde f es la función de transición):

$$V_{t+1}(s_t) = \max_{a_1} \left(R(s, a) + \gamma V_t(s, a) \right)$$

Dado el valor de V_0 , se resuelve de forma recursiva hacia atrás, como se muestra a continuación:

- Teniendo V_0 , resolvemos $V_1(s)$ para todos los estados de s .

- Teniendo V_1 , resolvemos $V_2(s)$ para todos los estados de s .
- ..., así recursivamente
- Hasta que finalmente obtenemos $V_T(s)$.

Como solo se pueden tomar un número de acciones finito, el problema de optimización que se deriva de las ecuaciones de Bellman siempre se puede resolver realizando un número finito de operaciones aritméticas. Además, las funciones valor en un Proceso de Decisión Markoviano discreto con horizonte finito siempre están bien definidas; aunque, en algunos casos existe más de una estrategia que maximice el valor esperado de las recompensas; es decir, la acción óptima puede no ser única.

Si el problema de decisión tiene un horizonte infinito, la función límite $V = \lim_{j \rightarrow \infty} V_j$ es independiente de j ; es decir, la función valor no dependerá del tiempo t . Por tanto, escribiremos la ecuación de HJB como (Rosell, 2022):

$$V(s) = \max_a (R(s, a) + \gamma V(f(s, a))) = \max_a H(s, a)$$

En este caso, para resolver la ecuación de HJB, y si se dan ciertas condiciones de regularidad para la función V , determinamos el control óptimo a través de la condición de optimalidad:

$$\frac{\partial H(s, a)}{\partial(a)} = 0$$

Si H es C^2 , damos con la función de estrategia $a^* = h(s)$, que nos da una norma o regla óptima para cambiar la acción óptima, dado el estado.

Con esto, la ecuación de HJB se convierte en una EDO no-lineal (Rosell, 2022):

$$V(s) = R(s, h(s)) + \gamma V[f(s, h(s))]$$

Nos encontramos en un proceso ahora donde el tiempo evoluciona de forma continua. Esto significa que $T = \mathbb{R}_+$. En este tipo de procesos volveremos a distinguir dos casos, cuando el horizonte es finito; es decir, hay un tiempo final T y que es el problema más simple, y cuando el horizonte es infinito.

Ahora nos encontramos en un espacio de funciones $(s(t), a(t))$, con $t_0 \leq t \leq T$. Nuestro objetivo está en encontrar funciones $(s^*(t), a^*(t))$ que resuelvan el siguiente problema:

$$\max_{a(t)} \int_{t_0}^T R(t, s(t), a(t)) dt$$

Teniendo en cuenta que:

$$\dot{s} = \frac{d(s(t), a(t))}{dt} = f(t, s(t), a(t))$$

dado el estado inicial $s(t_0) = s_0$. Observamos que $f(t, s(t), a(t))$ reemplaza a $s_{t+1} = f(s_t, a_t)$ que teníamos en el caso discreto. Asumimos que s^T es conocido. Recordamos que f es la función de transición de estado, que usamos en lugar de una probabilidad de transición.

Entonces, la función valor del estado, para el instante inicial es:

$$v(t_0, s_0) = \int_{t_0}^T R(t, s^*, a^*) dt$$

y para el último instante es

$$v(T, s(T)) = 0$$

A continuación, enunciamos un lema que nos da las condiciones necesarias para conseguir la optimalidad a partir del Principio de Optimalidad.

Lema. *Sea $v \in C^2(T, \mathbb{R})$. La función valor asociada al camino óptimo $\{(s^*(t), a^*(t)): t_0 \leq t \leq T\}$ verifica la ecuación en derivadas parciales no-lineal o Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB):*

$$-v_t(t_0, s_0) = \max_{a(t)} [R(t, s, a) + v_s(t, s)f(t, s, a)]$$

Donde $v_t(t, s) := \frac{\partial v(t, s)}{\partial t}$ y $v_s(t, s) := \frac{\partial v(t, s)}{\partial s}$. *Demostración.*

Consideramos la función valor

$$v(t, s) = \max_a \left(\int_t^T R(u, s, a) du \right)$$

Queremos encontrar una ecuación diferencial parcial para $v(t, s)$. Suponemos en todo momento que $R(\cdot)$ es continua como función total de t , con $s = s(t)$ y $a = a(t)$. Para todo $h > 0$ podemos escribir (Rosell, 2022):

$$\begin{aligned}
 v(t, s) &= \max_a \left(\int_t^{t+h} R(u, s, a) du + \int_{t+h}^T R(u, s, a) du \right) \\
 \square &= \max_a \left[\int_t^{t+h} R(u, s, a) du + \max_a \int_{t+h}^T R(u, s, a) du \right] \\
 \square &= \max_a \left[\int_t^{t+h} R(u, s, a) du + v(t+h, s_{t+h}) \right]
 \end{aligned}$$

Para encontrar la segunda igualdad usamos el principio de la programación dinámica. Asumiendo que v es $\mathcal{C}^2(T, \mathbb{R})$, vemos que:

$$v(t+h, s_{t+h}) = v(t, s) + \int_t^{t+h} \left(\frac{\partial v}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial s} f(u, s, a) \right) du$$

Como consecuencia:

$$\begin{aligned}
 v(t, s) &= v(t, s) \\
 &+ \max_a \left(\int_t^{t+h} R(u, s, a) du + \int_t^{t+h} (v_u + v_u f(u, s, a)) du \right)
 \end{aligned}$$

y

$$0 = \max_a \int_t^{t+h} \left(v_u + \max_a (R(u, s, a) + v_s f(u, s, a)) \right) du$$

Como esto es cierto para todo $h > 0$, obtenemos que:

$$v_t + \max_a (R(t, s, a) + v_s f(t, s, a)) = 0$$

Igual que en el caso discreto, en el caso continuo llamamos a $a^* = h(t, s)$ la función de estrategia. Entonces, la ecuación HJB se puede escribir como:

$$-v_t(t, s) = R(t, s, h(t, s) + v_s(t, s)f(t, s, h(t, s)))$$

Aunque la diferenciabilidad de v está asegurada para las funciones R y f , podemos encontrar soluciones explícitas para $v(\cdot)$ y $h(\cdot)$ casos muy puntuales, pero no suele ocurrir.

En el Horizonte infinito, nuestro objetivo ahora es el mismo que antes, pero a diferencia del caso anterior tenemos que $t \geq t_0$. Queremos entonces encontrar funciones $(s^*(t), a^*(t))$ que resuelvan el siguiente problema (Rosell, 2022):

$$\max_a \int_{t_0}^{\infty} R(s(t), a(t))e^{-\rho t} dt$$

Donde $\rho > 0$ y teniendo en cuenta que:

$$\dot{s}(t) \equiv \frac{ds}{dt} = f(s(t), a(t)), t \geq t_0$$

Dado el estado inicial $s(t_0) = s_0$. El siguiente lema, similar al anterior, nos da las condiciones necesarias para conseguir la optimalidad en este caso.

Lema. Sea $v \in C^2(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. La función valor asociada al camino óptimo $\{(s^*(t), a^*(t))\}: t_0 \leq t < \infty$ verifica la EDO no-lineal fundamental o Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) (Rosell, 2022):

$$\rho V(s) = \max_a [R(s, a) + V'(s)f(s, a)]$$

Demostración. Consideramos la función valor

$$\begin{aligned}
 v(t_0, s_0) &= \max_a \left(\int_{t_0}^{\infty} R(s, a) e^{-\rho t} dt \right) \\
 \square &= e^{-\rho t_0} \max_a \left(\int_{t_0}^{\infty} R(s, a) e^{-\rho(t-t_0)} dt \right) \\
 \square &= e^{-\rho t_0} V(s_0)
 \end{aligned}$$

Donde $V(\cdot)$ es independiente de t_0 y solamente depende de s_0 . Podemos hacer

$$V(s_0) = \max_a \left(\int_0^{\infty} R(s, a) e^{-\rho t} dt \right)$$

Entonces obtenemos, para cada (t, s) , que $v(t, s) = e^{-\rho t} V(s)$. Si calculamos las derivadas,

- $v_t(t, s) \equiv \frac{\partial v(t, s)}{\partial t} = -\rho e^{-\rho t} V(s)$
- $v_s(t, s) \equiv \frac{\partial v(t, s)}{\partial s} = e^{-\rho t} V'(s)$

y sustituimos en la ecuación de HJB $-v_t(t_0, s_0) = \max_{a(t)} [R(t, s, a) + v_s(t, s)f(t, s, a)]$ que hemos obtenido para el horizonte finito, vemos que

$$\begin{aligned}
 \rho e^{-\rho t} V(s) &= \max_a [R(t, s, a) e^{-\rho t} + e^{-\rho t} V'(s) f(s, a)] \Rightarrow \rho V(s) \\
 &= \max_a [R(s, a) + V'(s) f(s, a)]
 \end{aligned}$$

Si determinamos la función de estrategia $a^* = h(s)$ y sustituimos en la ecuación de HJB en $-v_t(t, s) = R(t, s, h(t, s) + v_s(t, s)f(t, s, h(t, s)))$, obtenemos (Rosell, 2022):

$$\rho V(s) = R(s, h(s)) + V'(s)f(s, h(s))$$

Vemos que es una EDO del tipo $\dot{x}(t) = a(t) + b(t)x(t)$; por tanto, esta nueva ecuación de HJB se puede definir como una recursión sobre s . Igual que en el caso anterior, en este es también poco común encontrar soluciones explícitas para $V(s)$.

Si no sabemos con seguridad cuál será el siguiente estado y , en cambio, tenemos alguna función de distribución se habla de programación dinámica estocástica. Las ideas básicas de determinar los estados, las etapas, las estrategias y las ecuaciones funcionales siguen valiendo, pero toman una forma distinta.

La aleatoriedad que aparece nos introduce a los procesos estocásticos. Es por esto antes de desarrollar los métodos de programación dinámica primero daremos la definición de conceptos como la esperanza condicionada, los procesos estocásticos y las filtraciones.

La esperanza condicionada indica que sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y consideremos dos variables aleatorias discretas X, Y ; entonces:

$$\mathbb{E}(X | Y = y) := \sum_x x P(X = x | Y = y) \text{ (suponemos } P(Y = y) > 0)$$

y podemos definir, a partir de aquí, la variable

$$\mathbb{E}(X | Y)(\omega) = \mathbb{E}(X | Y = y), \text{ si } Y(\omega) = y$$

o lo que es lo mismo

$$\mathbb{E}(X|Y) = \sum_y \mathbb{E}(X|Y=y)1_{\{Y=y\}}$$

Sea ahora $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ (suponemos $P(\mathcal{A}) > 0$)

$$\mathbb{E}(X| \mathcal{A}) := \sum_y xP(X=x| \mathcal{A})$$

Consideremos la σ – álgebra generada por una partición, (\mathcal{A}_i) , de Ω , llamémosle \mathcal{A} , esto es $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \cup_j \mathcal{A}_{ij}\}$, podemos ahora definir la variable aleatoria (Rosell, 2022):

$$\mathbb{E}(X| \mathcal{A})(\omega) = \mathbb{E}(X| \mathcal{A}_i), \text{ si } \omega \in \mathcal{A}_i$$

o equivalentemente

$$\mathbb{E}(X| \mathcal{A}) = \sum_i \mathbb{E}(X| \mathcal{A}_i)1_{\mathcal{A}_i}$$

Es importante notar que $\mathbb{E}(X| \mathcal{A})$ es una variable aleatoria \mathcal{A} – medible (Rosell, 2022):

$$\mathbb{E}(X| \mathcal{A})^{-1}(z_i) = \mathcal{A}_i \in \mathcal{A} \text{ si } z_i = \mathbb{E}(X| \mathcal{A}_i),$$

Además, para todo $A \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{E}(X1_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X| \mathcal{A})1_A)$$

Demostración. En efecto, si tomamos $A = \mathcal{A}_i$

$$\mathbb{E}(X| \mathcal{A})1_A = \mathbb{E}(X| \mathcal{A}_i)1_{\mathcal{A}_i},$$

De manera que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\mathbb{E}(X| \mathcal{A})1_A) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X| \mathcal{A}_i)1_A) &&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X| \mathcal{A}_i))P(\mathcal{A}_i) \\
 \square &= \sum_x xP(X = x| \mathcal{A}_i)P(\mathcal{A}_i) &&\square \\
 \square &= \sum_x xP(X = x, \mathcal{A}_i) = \mathbb{E}(X1_{\mathcal{A}_i}) &&\square
 \end{aligned}$$

Esto nos lleva a la siguiente definición general.

Definición. Consideremos una variable aleatoria integrable X y sea A una σ – álgebra contenida en \mathcal{F} , definimos la esperanza condicionada de X y sobre A a una variable aleatoria, digamos Z , con las siguientes propiedades:

- i) Z es A – medible.
- ii) Para todo $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{E}(Z1_A) = \mathbb{E}(X1_A)$

Se puede demostrar que tal variable siempre existe y es única casi seguramente. Vemos a continuación algunas de las principales propiedades de la esperanza condicionada.

2.5. Propiedades de la esperanza condicionada

Propiedades (Rosell, 2022):

1. Linealidad: $\mathbb{E}(aX + bY| \mathcal{A}) + b\mathbb{E}(Y| \mathcal{A})$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X| \mathcal{A})) = \mathbb{E}(X)$. Basta con tomar $\mathcal{A} = \Omega$ en ii).
3. Si X y \mathcal{A} son independientes $\mathbb{E}(X| \mathcal{A}) = \mathbb{E}(X)$. De hecho, la constante $\mathbb{E}(X)$ es trivialmente \mathcal{A} – medible, y para todo $A \in \mathcal{A}$, tenemos $\mathbb{E}(X1_A) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X1_A))$.

4. Si X es \mathcal{A} – medible; entonces, $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) = X$. Trivial a partir de la definición.

5. Si Y esta cotada y es \mathcal{A} – medible; entonces, $\mathbb{E}(YX | \mathcal{A}) = Y\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$. De hecho, la variable aleatoria $Y\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$ es integrable y \mathcal{A} – medible, y para todo $A \in \mathcal{A}$ tenemos

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{A})Y1_A) = \mathbb{E}(XY1_A),$$

donde la igualdad se deduce de (ii) y del teorema de convergencia dominada. Esta propiedad significa que las variables \mathcal{A} – medibles se comportan como constantes y pueden ser factorizadas fuera de la esperanza condicionada con respecto a \mathcal{A} . Esta propiedad es cierta siempre que $\mathbb{E}(|XY|) < \infty$. En particular si $X, Y \in L^2(\Omega)$.

6. En particular si $X, Y \in L^2(\Omega)$, por la propiedad anterior con $\mathcal{A} = \Omega$, tenemos que si Y es \mathcal{A} – medibles $X - \mathbb{E}(X | \mathcal{A})$ es ortogonal a Y (Rosell, 2022):

$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X | \mathcal{A}))Y\right) = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}(X | \mathcal{A})Y) = 0$$

7. (Propiedad iterativa) Dadas dos σ – álgebras $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$; entonces, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) | \mathcal{B}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{B})$. En efecto, sea $B \in \mathcal{B}$, tenemos que ver que

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{A})1_B) = \mathbb{E}(X1_B)$$

Pero como $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$; entonces, $B \in \mathcal{A}$ y la igualdad es cierta por definición de $\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$.

2.6. Procesos estocásticos y espacios filtrados

Los Procesos estocásticos y espacios filtrados indican que Sea un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) .

Definición. Un *proceso estocástico* X es un conjunto o familia de variables aleatorias $\{X_t, t \geq 0\}$, donde $X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definidos en el mismo espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) .

Definición. Un filtrado $(F_t)_{t \geq 0}$, es una sucesión creciente de sub- σ álgebras de F . El espacio $(\Omega, (F_t)_{t \geq 0}, \mathcal{F}, P)$ se dice que es un espacio filtrado.

Tomaremos $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Definición. Un proceso estocástico $X = \{X_t, t \geq 0\}$ es un proceso adaptado a la filtración $(F_t)_{t \geq 0}$ si la variable aleatoria X_t es una función medible de F_t para todo $t \in T$.

Definición. Una sucesión $M = (M_t)_{t \geq 0}$, se dicen que es una **martingala** (relativa a $(F_t)_{t \geq 0}$ o (F_t) -martingala) si (Rosell, 2022):

- i) M es adaptada
- ii) $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$
- iii) $\mathbb{E}(M_t | F_s) = M_s$, para $s \leq t$

Una **super martingala** (relativa a $(F_t)_{t \geq 0}$) se define similarmente excepto que iii) es reemplazada por:

$$\mathbb{E}(M_t | F_s) \leq M_s, \text{ para } s \leq t$$

y una **submartingala** se define con iii) reemplazada por

$$\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \geq M_s, \text{ para } s \leq t$$

2.6.1. Proceso a tiempo discreto

En el proceso a tiempo discreto, las variables en este caso son secuencias aleatorias $\{s_t(\omega), a_t(\omega)\}$ con $t \in \{0, 1, \dots, T\}$, que son adaptadas a la filtración $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}, t \in \{0, 1, \dots, T\}$. Suponemos que tenemos el conjunto $\{s_t, a_t\}, t \in \{0, 1, \dots, T\}$ que denota todas las secuencias aleatorias posibles donde $s_t = s_t(\omega^t)$ y $a_t = a_t(\omega^t)$ son procesos adaptados a \mathbb{F} . Nuestra función valor del estado en un instante τ es:

$$V_{T-\tau}(s_\tau) = \mathbb{E}_r \left(\sum_{t=r}^T \gamma^{t-r} R(s_t, a_t) | \mathcal{F}_\tau \right)$$

Vemos que esta expresión es muy similar a la del caso determinista, la única diferencia es que ahora tenemos un promedio condicionado en τ . Previamente, para el caso determinista, definimos la función de transición de estado determinista f . Para el caso estocástico, usaremos también una función de transición:

Definición. *Una función de transición de estado estocástico es una función $g: \mathcal{S} \times \mathcal{A}_s \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}$ que especifica el estado del sistema en $t + 1$ cuando el agente elige la acción $a \in \mathcal{A}_s$ en el estado s en t .*

Entonces, los estados de la función valor descrita anteriormente están sujetos a la siguiente secuencia aleatoria de restricciones, dado s_0 (Rosell, 2022):

$$\begin{array}{rcl}
 s_1 & = & g(s_0, a_0) \quad \square \quad \square \\
 s_2 & = & g(s_1, a_1, \omega^2) \quad \square \quad \square \\
 \square & \dots & \square \quad \square \quad \square \\
 s_{t+1} & = & g(s_t, a_t, \omega^{t+1}), \quad \text{para } t = 2, \dots, T - 2 \\
 \square & \dots & \square \quad \square \quad \square \\
 s_T & = & g(s_{T-1}, a_{T-1}, \omega^T) \quad \square \quad \square
 \end{array}$$

Donde ω es un proceso adaptado a \mathbb{F} , y que representa la incertidumbre que afecta a la decisión del agente. Nuestro objetivo es encontrar la solución $\{a_t^*, s_t\}, t \in \{0, 1, \dots, T\}$, al problema control óptimo; por tanto, sería aquella secuencia que maximice la función valor

$$\max_{\{a_t\}_{t=0}^T} \mathbb{E}_r \left(\sum_{t=r}^T \gamma^{t-r} R(s_t, a_t) \mid \mathcal{F}_r \right)$$

Al principio del instante t , s_t y a_t son conocidos, pero el valor de s_{t+1} al final del instante t está condicionado al valor de ω^{t+1} . Los valores de este proceso aleatorio dependen pues de una variable exógena que viene dada por un proceso estocástico.

Entonces, en el instante $\tau = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
 V_T(s_0) &= \mathbb{E}_0 \left(\sum_{t=0}^T \gamma^t R(s_t, a_t^*) \right) = \\
 & \quad \max_{\{a_t\}_{t=0}^T} \mathbb{E}_0 \left(\sum_{t=0}^T \gamma^t R(s_t, a_t) \right) \\
 \square &= \max_{\{a_t\}_{t=0}^T} \mathbb{E}_0 (R(s_0, a_0) + \gamma R(s_1, a_1) + \gamma^2 R(s_2, a_2) + \dots) \\
 \square &= \max_{\{a_t\}_{t=0}^T} \mathbb{E}_0 \left(R(s_0, a_0) + \gamma \sum_{t=1}^T \gamma^{t-1} R(s_t, a_t) \right) \\
 \square &= \max_{a_0} \left\{ R(s_0, a_0) + \gamma \mathbb{E}_0 \left[\max_{\{a_t\}_{t=0}^T} \mathbb{E}_1 \left(\sum_{t=1}^T \gamma^{t-1} R(s_t, a_t) \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Para obtener la última igualdad hemos aplicado el principio de optimalidad. Por el hecho de que las variables son medibles respecto a \mathcal{F}_0 , por la propiedad iterativa de la esperanza condicionada y por la definición de $V_{T-\tau}(s_\tau)$ con $\tau = 1$, vemos que:

$$V_T(s_0) = \max_{a_0} \left(R(s_0, a_0) + \gamma \mathbb{E}_0(V_{T-\tau}(s_1)) \right)$$

donde s_0, a_0 y V_0 son \mathcal{F}_0 – medible y son constantes si $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$, y si $s_1 = g(s_0, a_0, \omega^1)$ es \mathcal{F}_1 – medible.

Si aplicamos esta misma idea para la función valor para cualquier instante $0 \leq t \leq T$, encontramos la **Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)**:

$$V_{T-t}(s_t) = \max_{a_t} \left(R(s_t, a_t) + \gamma \mathbb{E}_t(V_{T-\tau-1}(s_{t+1})) \right)$$

Observamos que $\{V_{T-t}(s_t)\}$, $t \in \{0, 1, \dots, T\}$, es un proceso estocástico \mathcal{F}_t – medible y el operador $\mathbb{E}_t(\cdot)$ es un promedio condicionado a la información disponible en el instante t (representado por \mathcal{F}_t). Resolviendo la ecuación anterior de forma recursiva, obtendremos la solución al problema de control óptimo (Rosell, 2022).

Para desarrollar la ecuación de HJB para el caso estocástico continuo es necesario exponer previamente toda la teoría relativa a los movimientos brownianos, la integración estocástica, las ecuaciones diferenciales estocásticas, la fórmula de Itô, etc. Es por esto que en esta sección solo nos limitaremos a comentar de forma general cómo obtenemos la ecuación de HJB sin justificarlo de forma muy precisa.

Nuestro objetivo está en encontrar funciones $(s^*(t), a^*(t))$ que resuelvan el siguiente problema.

$$\max_a \mathbb{E} \left(\int_{y_0}^T R(t, s(t), a(t)) dt \right)$$

sujeto a la ecuación diferencial estocástica

$$ds(t) = g(t, s(t), a(t))dt + \sigma(t, s(t), a(t))dt B(t)$$

dada la distribución inicial de la variable de estado $s(0, \omega) = s_0(\omega)$. Llamamos $g(\cdot)$ a la función de transición de estado estocástico. La función de recompensa $R(\cdot)$ la función $\sigma(\cdot)$ son funciones \mathcal{F}_t – adaptadas. La función valor del estado para el instante inicial es

$$v(t_0, s_0) = \mathbb{E} \left(\int_{y_0}^T R(t, s^*, a^*) dt \right)$$

Lema. Sea $v \in \mathcal{C}^2(\mathcal{J}, \mathbb{R})$. La función valor asociada al camino óptimo $\{s^*(t), a^*(t): t_0 \leq t \leq T\}$ verifica la **Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)**:

$$-v_t(t, s) = \max_a \left(R(t, s, a) + g(t, s, a)v_s(t, s) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t, s, a)v_{ss}(t, s) \right)$$

donde $v_t(t, s) := \left(\frac{\partial v(t, s)}{\partial(t)}\right)$, $v_s(t, s) := \left(\frac{\partial v(t, s)}{\partial(s)}\right)$ y $v_{ss}(t, s) := \left(\frac{\partial^2 v(t, s)}{\partial(s^2)}\right)$.

Demostración. La demostración es similar a la del caso determinista continuo. Consideramos la función valor

$$v_t(t, s) = \max_a \mathbb{E} \left(\int_t^T R(u, s, a) du \mid \mathcal{F}_t \right)$$

Queremos encontrar una ecuación diferencial parcial para $v(t, s)$. Suponemos en todo momento que $R(\cdot)$ es continua como función total de t , con $s = s(t)$ y $a = a(t)$. Para todo $h > 0$ y usando el principio de optimalidad podemos escribir:

$$\begin{aligned} v(t, s) &= \max_a \mathbb{E} \left[\left(\int_t^{t+h} R(u, s, a) du + \int_{t+h}^T R(u, s, a) du \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ \square &= \max_a \mathbb{E} \left[\left(\int_t^{t+h} R(u, s, a) du + \mathbb{E} \left(\int_{t+h}^T R(u, s, a) du \mid \mathcal{F}_{t+h} \right) \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ \square &= \max_a \mathbb{E} \left[\int_t^{t+h} R(u, s, a) du + v(t+h, s_{t+h}) \mid \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Asumiendo que v es una función continua y diferenciable de segundo orden, aplicando la fórmula de Itô obtenemos (Rosell, 2022):

$$\begin{aligned}
 v(t+h, s_{t+h}) &= v(t, s) \\
 &+ \int_t^{t+h} \left(\frac{\partial v}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial s} g(u, s, a) \right. \\
 &\left. + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right) (\sigma^2(u, s, a)) \right) du + \int_t^{t+h} \frac{\partial v}{\partial s} \sigma(u, s, a) dB_u
 \end{aligned}$$

Como consecuencia, si $\int_{t_0}^T \mathbb{E}(v_s \sigma_s)^2 dt < \infty$,

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}(v(t+h, s_{t+h}) | \mathcal{F}_t) \\
 &= v(t, s) \\
 &+ \mathbb{E} \left(\int_t^{t+h} \left(v_t + v_s g(u, s, a) + \left(\frac{1}{2} v_{ss} \right) (\sigma^2(u, s, a)) \right) du \middle| \mathcal{F}_t \right)
 \end{aligned}$$

y por tanto, para todo $h > 0$

$$\begin{aligned}
 &0 \\
 &= \mathbb{E} \left(\int_t^{t+h} \max_a \left(R(u, s, a) + v_u + v_s g(u, s, a) + \left(\frac{1}{2} v_{ss} \right) (\sigma^2(u, s, a)) \right) du \middle| \mathcal{F}_t \right)
 \end{aligned}$$

Como esto es cierto para todo $h > 0$ y $t_0 \leq t \leq T$, obtenemos que (Rosell, 2022):

$$v_t + \max_a \left(R(t, s, a) + v_s g(t, s, a) + \left(\frac{1}{2} v_{ss} \right) (\sigma^2(t, s, a)) \right) = 0$$

2.7. Plataforma internet (PHPSimplex y Simplex Calculator online)

2.7.1. Fases de estudio

Según (Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020), la web www.PHPSimplex.com permite resolver problemas de optimización utilizando el método Simplex. Fue descubierto por el matemático norteamericano George Bernard Dantzig en 1947, es una técnica popular para dar soluciones numéricas a problemas de programación lineal en los que intervienen tres o más variables.

El álgebra matricial y el proceso de eliminación de Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones lineales constituyen la base del método simplex. La resolución de programas lineales mediante el método Simplex implica la realización de gran cantidad de cálculos a través de sucesivas tablas, sobre todo cuando el número de variables y/o restricciones es relativamente elevado.

En casos reales, la magnitud de los problemas hace necesario recurrir al uso del computador. PHPSimplex permite hacer la resolución paso a paso viendo los cambios que se producen en las tablas del Simplex (Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020).

Es decir, es una herramienta online para resolver problemas de programación lineal. Su uso es libre y gratuito. Para acceder basta con pulsar el ícono que aparece a la izquierda o sobre 'PHPSimplex' en el menú superior.

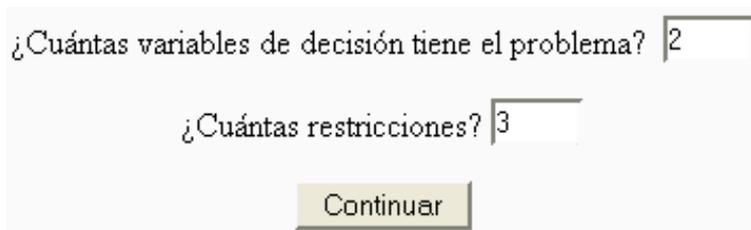
'PHPSimplex' es capaz de resolver problemas mediante el método simplex, el método de las Dos Fases y el método gráfico, pues no cuenta

con limitaciones en el número de variables de decisión ni en las restricciones de los problemas. Es decir, es una herramienta pensada para ayudar a los estudiantes en su aprendizaje pues no sólo muestra los resultados finales si no también intermedios. Ofrece la solución directa para uso de profesionales.

Otras de sus ventajas es que no precisa de ningún lenguaje para enunciar el problema, ofrece una interfaz amigable, es cercano al usuario, de manejo fácil e intuitivo, no es necesario instalar nada para poder usarlo y está disponible en varios idiomas. Además, está disponible un manual de ayuda de PHPSimplex para aprender rápidamente a usar la herramienta.

A continuación, podrá leer una breve y sencilla guía de uso para la herramienta PHPSimplex. Una vez que haya modelado el problema de programación lineal; es decir, tenga identificada la función objetivo a maximizar/minimizar junto con sus restricciones, puede estar seguro de que la tarea más difícil ha terminado. Deje ahora que PHPSimplex haga el trabajo. Pues sólo hay que indicarle al programa dichos datos, como puede verse en la captura siguiente:

Figura 2.2. Problema de programación lineal



¿Cuántas variables de decisión tiene el problema?

¿Cuántas restricciones?

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

Pulse sobre el botón "Continuar". Es necesario introducir el resto de datos, para que PHPSimplex sea capaz de resolver el problema. Ante la pregunta, "¿Cuál es el objetivo de la función?" deberá seleccionar del desplegable si desea Maximizar o Minimizar, en este ejemplo la elección adecuada es "Maximizar".

Rellene adecuadamente las casillas de "Función" con los coeficientes adecuados para cada variable de decisión, para este ejemplo será 3 y 2. Opere de la misma forma para completar las casillas de las restricciones, teniendo especial cuidado con el tipo de inecuación ya que puede seleccionar del menú desplegable " \geq ", " \leq " ó " $=$ ".

PHPSimplex dispone de un control de errores a la entrada de datos, es decir, comprueba que lo que se introduce son números. En el caso de que alguna casilla quedara vacía su valor se establece a cero.

Tampoco debe preocuparse por restringir los valores negativos de las variables de decisión, ya que PHPSimplex lo hará por sí solo.

Debería quedar como en la siguiente imagen.

Figura 2.3. Restricción de las variables

¿Cuál es el objetivo de la función?

Función: X1 + X2

Restricciones:

X1 + X2

X1 + X2

X1 + X2

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

Ahora puede ver el problema original tal y como se ha introducido y el problema pasado a forma estándar automáticamente por PHPSimplex. En este momento puede decidir si desea observar cada iteración del método Simplex (o método de las Dos Fases) o no.

PHPSimplex puede mostrar cada tabla del método Simplex (o método de las Dos Fases) como ayuda para los estudiantes; es decir, que si está utilizando PHPSimplex como un medio educativo, debe pulsar sobre el botón "Continuar".

Sin embargo, si usted está haciendo un uso profesional de la herramienta, y simplemente desea obtener la solución directamente, obviando todos los pasos intermedios, debe pulsar sobre la opción de "Solución Directa".

Figura 2.4. Solución directa

Pasamos el problema a la forma estándar, añadiendo variables de exceso, holgura, y artificiales según corresponda.

MAXIMIZAR: $3 X_1 + 2 X_2$

$2 X_1 + 1 X_2 \leq 18$
 $2 X_1 + 3 X_2 \leq 42$
 $3 X_1 + 1 X_2 \leq 24$
 $X_1, X_2 \geq 0$



MAXIMIZAR: $3 X_1 + 2 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5$

$2 X_1 + 1 X_2 + 1 X_3 = 18$
 $2 X_1 + 3 X_2 + 1 X_4 = 42$
 $3 X_1 + 1 X_2 + 1 X_5 = 24$
 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

Pasamos a construir la primera tabla del método Simplex.

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

Pulsando en "Continuar", PHPSimplex mostrará cada iteración del método que esté ejecutando. El elemento marcado en verde, es el elemento pivote de la tabla.

Tabla 2.1. Interacciones del método

Tabla 1			3	2	0	0	0
Base	Cb	P0	P1	P2	P3	P4	P5
P3	0	18	2	1	1	0	0
P4	0	42	2	3	0	1	0
P5	0	24	3	1	0	0	1
Z		0	-3	-2	0	0	0

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

Usted solo tendrá que ir pulsando sobre "Continuar" para iniciar una nueva iteración y generar la siguiente tabla hasta que el método finalice. Una vez acabado, PHPSimplex remarca en verde el resultado final, y ofrece una breve explicación acerca de la solución obtenida tanto en el caso de existir como si no, y por qué.

Tabla 2.2. Nuevas interacciones del método

Tabla 4			3	2	0	0	0
Base	Cb	P0	P1	P2	P3	P4	P5
P2	2	12	0	1	-0.5	0.5	0
P5	0	3	0	0	-1.75	0.25	1
P1	3	3	1	0	0.75	-0.25	0
Z		33	0	0	1.25	0.25	0

La solución óptima es $Z = 33$

$X_1 = 3$

$X_2 = 12$

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

Para finalizar esta breve guía de introducción a la herramienta, haremos mención al caso de estar resolviendo un problema en el que sea necesario utilizar el método de las dos fases.

En el paso de mostrar el problema en forma estándar, se advertirá de que se va a entrar en la Fase I del método de las Dos Fases.

Figura 2.5. Solución del problema

Pasamos el problema a la forma estándar, añadiendo variables de exceso, holgura, y artificiales según corresponda.

MAXIMIZAR: $6 X_1 + 1 X_2$

$-1 X_1 + 1 X_2 \geq 1$

$2 X_1 + 1 X_2 \leq 6$

$X_1, X_2 \geq 0$



MAXIMIZAR: $6 X_1 + 1 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5$

$-1 X_1 + 1 X_2 - 1 X_3 + 1 X_5 = 1$

$2 X_1 + 1 X_2 + 1 X_4 = 6$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

Pasamos a construir la primera tabla de la Fase I del método de las Dos Fases.

Continuar

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

Cuando se realizan las iteraciones, en el caso de que el problema tenga solución se indica que se pasa a la Fase II.

Tabla 2.3. Fase II

Tabla 2			0	0	0	0	-1
Base	Cb	P0	P1	P2	P3	P4	P5
P2	0	1	-1	1	-1	0	1
P4	0	5	3	0	1	1	-1
Z		0	0	0	0	0	1

Existe alguna solución posible para el problema, por lo que podemos pasar a la Fase II para calcularla.

Continuar

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

o en caso de no existir solución, se expresa dicha información.

Tabla 2.4. Nuevas interacciones del método

Tabla 2			0	0	0	0	-1
Base	Cb	P0	P1	P2	P3	P4	P5
P5	-1	1	0	0	-1	-0.5	1
P1	0	5	1	-1	0	0.5	0
Z		-1	0	0	1	0.5	0

No existe ninguna solución posible para el problema.

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

Para el resto de iteraciones del método de las Dos Fases la forma de actuar es la misma que para el método Simplex.

2.7.2. Ejemplo 1

Una fábrica de cervezas produce tres tipos distintos denominados negra, rubia y de baja graduación. Para su obtención son necesarios, además de agua y lúpulo para los cuales no hay limitación de disponibilidad, malta y levadura, que limitan la capacidad diaria de producción.

La siguiente tabla indica la cantidad necesaria de cada uno de estos recursos para producir un litro de cada una de las respectivas cervezas,

los kilos disponibles de cada recurso y el beneficio en unidades monetarias (u.m.) por litro de cada cerveza producida. El problema del fabricante consiste en decidir cuánto debe fabricar de cada cerveza para que el beneficio total diario sea máximo.

Tabla 2.5. Condiciones de producción

Recursos disponibles	Tipo de cerveza			
	Negra	Rubia	Baja graduación	Disponibilidad
Malta	2.0	1.0	2.0	30.0
Levadura	1.0	2.0	2.0	45.0
Beneficio económico	4.0	7.0	3.0	

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

El modelo del problema indica las siguientes variables de decisión:

- X_1 = Producción en litros de cerveza negra (N)/día.
- X_2 = Producción en litros de cerveza rubia (R)/día.
- X_3 = Producción en litros de baja graduación (B)/día.

El conjunto de restricciones es:

- ❖ $2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 30$
- ❖ $X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 45$

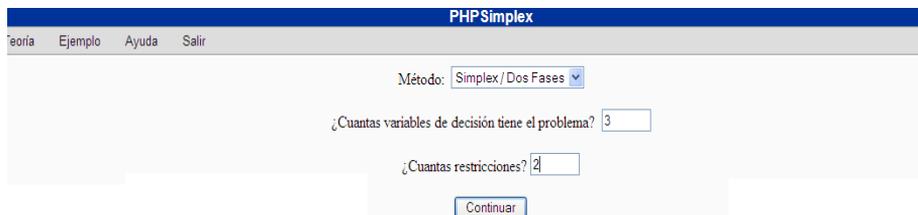
La función de maximización del beneficio es:

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 7X_2 + 3X_3$$

Se va a utilizar el programa gratuito integrado en la web www.PHPSimplex.com para buscar las soluciones, pues PHPSimplex es una herramienta online para resolver problemas de programación lineal cuyo uso es libre y gratuito. Introducimos el modelo del problema para ver los resultados y comprobar si llega a la misma solución que hemos obtenido anteriormente con el Solver y el prototipo de Algoritmos Genéticos.

En primer lugar, elegimos el método Simplex, introducimos el número de variables, número de restricciones, tres y dos respectivamente, pulsamos sobre el botón de “Continuar”.

Figura 2.6. Procedimiento Método Simplex



The screenshot shows the PHPSimplex web interface. At the top, there is a navigation menu with links for 'teoría', 'Ejemplo', 'Ayuda', and 'Salir'. Below the menu, the 'Método' is set to 'Simplex / Dos Fases'. There are two input fields: '¿Cuántas variables de decisión tiene el problema?' with the value '3' and '¿Cuántas restricciones?' with the value '2'. A 'Continuar' button is located at the bottom of the form.

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

A continuación, elegimos la opción de Maximizar, pues buscamos el beneficio máximo para este problema y vamos rellenando los huecos con los respectivos coeficientes, una vez rellenados los campos pulsamos el botón de “Continuar”.

Figura 2.7. Maximización

¿Cual es el objetivo de la funcion? Maximizar

Funcion: 4 X1 + 7 X2 + 3 X3

Restricciones:

2 X1 + 1 X2 + 2 X3 ≤ 30

1 X1 + 2 X2 + 2 X3 ≤ 45

Continuar

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

Una vez introducido el modelo, el programa nos lo muestra ordenadamente:

Figura 2.8. Forma estándar

Pasamos el problema a la forma estándar, añadiendo variables de exceso, holgura, y artificiales según corresponda.

<p>MAXIMIZAR: $4 X_1 + 7 X_2 + 3 X_3$</p> <p>$2 X_1 + 1 X_2 + 2 X_3 \leq 30$</p> <p>$1 X_1 + 2 X_2 + 2 X_3 \leq 45$</p> <p>$X_1, X_2, X_3 \geq 0$</p>		<p>MAXIMIZAR: $4 X_1 + 7 X_2 + 3 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5$</p> <p>$2 X_1 + 1 X_2 + 2 X_3 + 1 X_4 = 30$</p> <p>$1 X_1 + 2 X_2 + 2 X_3 + 1 X_5 = 45$</p> <p>$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$</p>
---	--	---

Pasamos a construir la primera tabla del método del Simplex.

Continuar

Solución directa

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

Una vez comprobado que todos los datos son correctos pulsamos sobre el botón “Solución directa” para que nos de la decisión óptima que maximiza el beneficio para los datos introducidos.

Figura 2.9. Solución directa

La solución óptima es $Z = 160$
 $X_1 = 5$
 $X_2 = 20$
 $X_3 = 0$

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

2.7.3. Ejemplo 2

Una empresa de alimentación produce zumos de pera, naranja, limón, tomate, manzana, además de otros dos tipos denominados H y G que son combinados de algunos de los anteriores. La disponibilidad de fruta para el período próximo, así como los costes de producción y precios de venta para los zumos, vienen dados en la siguiente tabla:

Tabla 2.6. Condiciones de producción

Fruta	Disponibilidad máxima (Kg)	Costo (Ctvs. de €/Kg)	Precio de venta (Ctvs. de €/Kg)
Naranja (N)	32 000	94.0	129.0
Pera (P)	25 000	87.0	125.0
Limón (L)	21 000	73.0	110.0
Tomate (T)	18 000	47.0	88.0
Manzanas (M)	27 000	68.0	97.0

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

Las especificaciones y precios de venta de los combinados de zumos frutales vienen dados en la siguiente tabla:

Tabla 2.7. Especificaciones y precios

Combinado	Especificación	Precio de venta (Ctvs. de €/Kg)
H	No más del 50% de M No más del 20% de P No menos del 1% de L	100.0
G	40% de N 35% de L 25% de P	

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

La demanda de los distintos zumos es grande; por lo que, se espera vender toda la producción. Por cada Kg de fruta se produce un litro del correspondiente zumo. Formular un programa lineal para determinar los niveles de producción de los siete zumos de manera que se tenga beneficio máximo para el período entrante.

Se ha reducido el número de restricciones de 13 a 11, desapareciendo los zumos combinados, H y G, como variable y apareciendo únicamente como variable la cantidad de cada zumo simple que forman un combinado, $H = H_m + H_p + H_l$ y $G = G_n + G_l + G_p$.

Las variables de decisión son: N (Naranja), P (Pera), L (Limón), T (Tomate), M (Manzana), G_n (Parte de Naranja del combinado G), G_l (Parte de Limón del combinado G), G_p (Parte de Pera del combinado G), H_m (Parte de Manzana del combinado H), H_p (Parte de Pera del combinado H), H_l (Parte de Limón del combinado H).

Las restricciones son:

$$N + G_n \leq 32\ 000$$

$$P + H_p + G_p \leq 25\ 000$$

$$L + H_l + G_l \leq 21\ 000$$

$$T \leq 18\ 000$$

$$M + H_m \leq 27\ 000$$

$$G_n = 0'40(G_n + G_l + G_p)$$

$$G_l = 0'35(G_n + G_l + G_p)$$

$$G_p = 0'25(G_n + G_l + G_p)$$

$$H_m \leq 0'50(H_m + H_p + H_l)$$

$$H_p \leq 0'20(H_m + H_p + H_l)$$

$$H_l \leq 0'10(H_m + H_p + H_l)$$

La función de maximización del beneficio es:

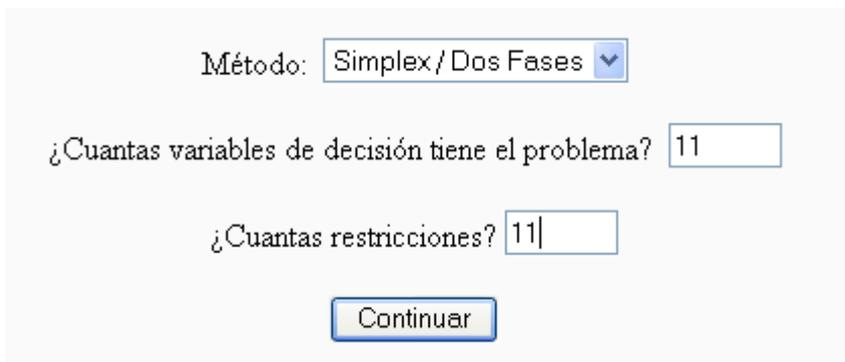
$$\text{Max } Z = 35N + 38P + 37L + 41T + 29M + 120(G_n + G_l + G_p) - 94G_n - 73G_l - 87G_p + 100(H_m + H_p + H_l) - 68H_m - 87H_p - 73H_l$$

Simplificando:

$$\text{Max } Z = 35N + 38P + 37L + 41T + 29M + 26G_n + 47G_l + 33G_p + 32H_m + 13H_p + 27H_l$$

Se ha introducido el modelo en la web www.PHPSimplex.com:

Figura 2.10. Selección del modelo



Método:

¿Cuántas variables de decisión tiene el problema?

¿Cuántas restricciones?

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

Figura 2.11. Prodedimiento del problema

¿Cuál es el objetivo de la función? Maximizar

Función: X₁ + X₂ + X₃ + X₄ + X₅ + X₆ + X₇ + X₈ + X₉ + X₁₀ + X₁₁

Restricciones:

1	X ₁	+ 0	X ₂	+ 0	X ₃	+ 0	X ₄	+ 0	X ₅	+ 1	X ₆	+ 0	X ₇	+ 0	X ₈	+ 0	X ₉	+ 0	X ₁₀	+ 0	X ₁₁	≤	32000
0	X ₁	+ 1	X ₂	+ 0	X ₃	+ 0	X ₄	+ 0	X ₅	+ 0	X ₆	+ 0	X ₇	+ 1	X ₈	+ 0	X ₉	+ 1	X ₁₀	+ 0	X ₁₁	≤	25000
0	X ₁	+ 0	X ₂	+ 1	X ₃	+ 0	X ₄	+ 0	X ₅	+ 0	X ₆	+ 1	X ₇	+ 0	X ₈	+ 0	X ₉	+ 0	X ₁₀	+ 1	X ₁₁	≤	21000
0	X ₁	+ 0	X ₂	+ 0	X ₃	+ 1	X ₄	+ 0	X ₅	+ 0	X ₆	+ 0	X ₇	+ 0	X ₈	+ 0	X ₉	+ 0	X ₁₀	+ 0	X ₁₁	≤	18000
0	X ₁	+ 0	X ₂	+ 0	X ₃	+ 0	X ₄	+ 1	X ₅	+ 0	X ₆	+ 0	X ₇	+ 0	X ₈	+ 1	X ₉	+ 0	X ₁₀	+ 0	X ₁₁	≤	27000
0	X ₁	+ 0	X ₂	+ 0	X ₃	+ 0	X ₄	+ 0	X ₅	+ 0.8	X ₆	+ -0.4	X ₇	+ -0.4	X ₈	+ 0	X ₉	+ 0	X ₁₀	+ 0	X ₁₁	=	0
0	X ₁	+ 0	X ₂	+ 0	X ₃	+ 0	X ₄	+ 0	X ₅	+ -0.35	X ₆	+ 0.65	X ₇	+ -0.35	X ₈	+ 0	X ₉	+ 0	X ₁₀	+ 0	X ₁₁	=	0
0	X ₁	+ 0	X ₂	+ 0	X ₃	+ 0	X ₄	+ 0	X ₅	+ -0.25	X ₆	+ -0.25	X ₇	+ 0.75	X ₈	+ 0	X ₉	+ 0	X ₁₀	+ 0	X ₁₁	=	0
0	X ₁	+ 0	X ₂	+ 0	X ₃	+ 0	X ₄	+ 0	X ₅	+ 0	X ₆	+ 0	X ₇	+ 0.5	X ₈	+ -0.5	X ₉	+ -0.5	X ₁₀	+ -0.5	X ₁₁	≤	0
0	X ₁	+ 0	X ₂	+ 0	X ₃	+ 0	X ₄	+ 0	X ₅	+ 0	X ₆	+ 0	X ₇	+ 0	X ₈	+ -0.2	X ₉	+ 0.8	X ₁₀	+ -0.2	X ₁₁	≤	0
0	X ₁	+ 0	X ₂	+ 0	X ₃	+ 0	X ₄	+ 0	X ₅	+ 0	X ₆	+ 0	X ₇	+ 0	X ₈	+ -0.1	X ₉	+ -0.1	X ₁₀	+ 0.8	X ₁₁	≥	0

Continuar

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

Una vez introducidos los datos, el programa nos muestra el modelo con las variables de holgura y variables artificiales añadidas.

Figura 2.12. Modelo y sus variables

MAXIMIZAR: 35 X₁ + 38 X₂ + 37 X₃ + 41 X₄ + 29 X₅ + 26 X₆ + 47 X₇ + 33 X₈ + 32 X₉ + 13 X₁₀ + 27 X₁₁ + 0 X₁₂ + 0 X₁₃ + 0 X₁₄ + 0 X₁₅ + 0 X₁₆ + 0 X₁₇ + 0 X₁₈ + 0 X₁₉ + 0 X₂₀ + 0 X₂₁ + 0 X₂₂ + 0 X₂₃

1 X₁ + 0 X₂ + 0 X₃ + 0 X₄ + 0 X₅ + 1 X₆ + 0 X₇ + 0 X₈ + 0 X₉ + 0 X₁₀ + 0 X₁₁ ≤ 32000

0 X₁ + 1 X₂ + 0 X₃ + 0 X₄ + 0 X₅ + 0 X₆ + 0 X₇ + 1 X₈ + 0 X₉ + 1 X₁₀ + 0 X₁₁ ≤ 25000

0 X₁ + 0 X₂ + 1 X₃ + 0 X₄ + 0 X₅ + 0 X₆ + 1 X₇ + 0 X₈ + 0 X₉ + 1 X₁₀ + 1 X₁₁ ≤ 21000

0 X₁ + 0 X₂ + 0 X₃ + 1 X₄ + 0 X₅ + 0 X₆ + 0 X₇ + 0 X₈ + 0 X₉ + 0 X₁₀ + 0 X₁₁ ≤ 18000

0 X₁ + 0 X₂ + 0 X₃ + 0 X₄ + 1 X₅ + 0 X₆ + 0 X₇ + 0 X₈ + 1 X₉ + 0 X₁₀ + 0 X₁₁ ≤ 27000

0 X₁ + 0 X₂ + 0 X₃ + 0 X₄ + 0 X₅ + 0.6 X₆ - 0.4 X₇ - 0.4 X₈ + 0 X₉ + 0 X₁₀ + 0 X₁₁ = 0

0 X₁ + 0 X₂ + 0 X₃ + 0 X₄ + 0 X₅ - 0.35 X₆ + 0.65 X₇ - 0.35 X₈ + 0 X₉ + 0 X₁₀ + 0 X₁₁ = 0

0 X₁ + 0 X₂ + 0 X₃ + 0 X₄ + 0 X₅ - 0.25 X₆ - 0.25 X₇ + 0.75 X₈ + 0 X₉ + 0 X₁₀ + 0 X₁₁ = 0

0 X₁ + 0 X₂ + 0 X₃ + 0 X₄ + 0 X₅ - 0.5 X₆ - 0.5 X₇ + 0.75 X₈ + 0 X₉ + 0 X₁₀ - 0.5 X₁₁ ≤ 0

0 X₁ + 0 X₂ + 0 X₃ + 0 X₄ + 0 X₅ + 0 X₆ + 0 X₇ + 0 X₈ - 0.2 X₉ + 0.8 X₁₀ - 0.2 X₁₁ ≤ 0

0 X₁ + 0 X₂ + 0 X₃ + 0 X₄ + 0 X₅ + 0 X₆ + 0 X₇ + 0 X₈ - 0.1 X₉ - 0.1 X₁₀ + 0.9 X₁₁ ≥ 0

X₁, X₂, X₃, X₄, X₅, X₆, X₇, X₈, X₉, X₁₀, X₁₁ ≥ 0

MAXIMIZAR: 35 X₁ + 38 X₂ + 37 X₃ + 41 X₄ + 29 X₅ + 26 X₆ + 47 X₇ + 33 X₈ + 32 X₉ + 13 X₁₀ + 27 X₁₁ + 0 X₁₂ + 0 X₁₃ + 0 X₁₄ + 0 X₁₅ + 0 X₁₆ + 0 X₁₇ + 0 X₁₈ + 0 X₁₉ + 0 X₂₀ + 0 X₂₁ + 0 X₂₂ + 0 X₂₃

1 X₁ + 1 X₆ + 1 X₁₂ = 32000

0 X₁ + 1 X₂ + 1 X₈ + 1 X₁₀ + 0 X₁₁ + 1 X₁₃ = 25000

0 X₁ + 1 X₃ + 1 X₇ + 1 X₁₁ + 1 X₁₄ = 21000

0 X₁ + 1 X₄ + 1 X₁₅ = 18000

0 X₁ + 1 X₅ + 1 X₉ + 0 X₁₀ + 0 X₁₁ + 1 X₁₆ = 27000

0 X₁ + 0.6 X₆ - 0.4 X₇ - 0.4 X₈ + 1 X₂₂ = 0

0 X₁ - 0.35 X₆ + 0.65 X₇ - 0.35 X₈ + 1 X₂₁ = 0

0 X₁ - 0.25 X₆ - 0.25 X₇ + 0.75 X₈ + 1 X₂₀ = 0

0 X₁ + 0.5 X₉ - 0.5 X₁₀ - 0.5 X₁₁ + 1 X₁₇ = 0

0 X₁ - 0.2 X₉ + 0.8 X₁₀ - 0.2 X₁₁ + 1 X₁₈ = 0

0 X₁ - 0.1 X₉ - 0.1 X₁₀ + 0.9 X₁₁ - 1 X₁₉ + 1 X₂₃ = 0

X₁, X₂, X₃, X₄, X₅, X₆, X₇, X₈, X₉, X₁₀, X₁₁, X₁₂, X₁₃, X₁₄, X₁₅, X₁₆, X₁₇, X₁₈, X₁₉, X₂₀, X₂₁, X₂₂, X₂₃ ≥ 0

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

Una vez llegado a este punto, dando al botón de continuar o de Solución Directa que observamos en la siguiente, el programa nos proporciona un resultado óptimo igual al alcanzado por el Algoritmo Memético propuesto en el punto siguiente.

Figura 2.13. Algoritmo Memético

Pasamos el problema a la forma estándar, añadiendo variables de exceso, holgura, y artificiales según corresponda.

<p>MAXIMIZAR: $4 X_1 + 7 X_2 + 3 X_3$</p> <p>$2 X_1 + 1 X_2 + 2 X_3 \leq 30$ $1 X_1 + 2 X_2 + 2 X_3 \leq 45$ $X_1, X_2, X_3 \geq 0$</p>		<p>MAXIMIZAR: $4 X_1 + 7 X_2 + 3 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5$</p> <p>$2 X_1 + 1 X_2 + 2 X_3 + 1 X_4 = 30$ $1 X_1 + 2 X_2 + 2 X_3 + 1 X_5 = 45$ $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$</p>
---	---	---

Pasamos a construir la primera tabla del método del Simplex.

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

Se ha implementado un prototipo de Algoritmo Genético con las siguientes características:

- Generación aleatoria de la población inicial.
- Número de individuos evaluados = 1000.
- Probabilidad de mutación = 20 %.
- Tamaño de la población = 20.
- Cruzamiento uniforme (cada variable o rasgo genético de un nuevo individuo tiene el 50% de posibilidades de pertenecer a un progenitor o al otro), Syswerda (1989).
- El valor de fitness es el máximo valor de z (beneficio).
- Selección por Ruleta, Michalewicz (1996).
- Reemplazo por distancia para mantener la diversidad de la población en la que dos individuos muy parecidos (distancia euclídea entre ambos menores que 0.01 uds.) no pueden coexistir

en la población (Worst Among Most Similar Replacement, WAMS), Shuhei 2003, y mantenimiento del tamaño de la población reemplazando al peor individuo (Replace Worst Strategy, RW) siempre y cuando cumpla el criterio de diversidad anterior.

- Método heurístico que prueba los enteros más cercanos a la mejor solución de la población en cada generación.
- Los pasos de ejecución del prototipo son los siguientes:
- Generación de la población inicial a partir de la solución generada manualmente.
- Cálculo del valor de fitness para cada individuo.
- Repetir:
- Aplicación del operador de selección (Ruleta) para obtener los dos padres.
- Aplicación de operadores de cruzamiento y mutación.
- Aplicación del método heurístico de probar enteros.
- Cálculo del valor de fitness para las nuevas generaciones creadas.
- Reemplazamiento WAMS y RW.

Hasta alcanzar el criterio de parada. Con estas características alcanza la solución óptima para este problema con un beneficio de 4'368 000 €.

En la figura siguiente, se puede observar la población inicial generada aleatoriamente. Las 11 primeras columnas, corresponden con el valor que toman las variables N, P, L, T, M, Gn, Gl, Gp, Hm, Hp, Hl. La última corresponde al beneficio que se obtendría con los valores asociados de las 11 variables.

Figura 2.14. Población inicial aleatoria

Poblacion inicial												
Ind.1:12.5	13.96	16.68	13.38	6	0	0	0	15.64	6.44	18.66	3395.74	
Ind.2:18.3	15.38	0.16	6.3	19.54	0	0	0	18.14	2.22	19.38	3188.42	
Ind.3:1.5	13.94	19.26	17.6	7.62	0	0	0	13.8	5.16	12.3	3078.2	
Ind.4:16.04	11.56	11.72	13.86	15.14	0	0	0	3.32	1.4	18.1	3054.78	
Ind.5:1.36	14.08	11.62	19	19.24	0	0	0	1.56	2.46	16.4	2874.24	
Ind.6:6.06	15.74	5.58	14.4	7.06	0	0	0	16.88	0	17.94	2836.36	
Ind.7:4.66	15.28	11.68	15.78	0.32	0	0	0	12.64	3.76	17.24	2751	
Ind.8:13.04	9.8	12.82	16.56	2.98	0	0	0	8.6	0.24	11.12	2647.08	
Ind.9:9.62	3.14	15.78	18.68	5.28	0	0	0	3.28	1.62	19.54	2612.48	
Ind.10:11.56	13.1	0	14.18	3.3	0	0	0	17.36	6.74	12.14	2550.4	
Ind.11:11.34	12.52	4.52	17.24	10.32	0	0	0	4.36	1.12	12.18	2528.96	
Ind.12:14.14	10.92	13.68	16.42	0.86	0	0	0	0.46	0.48	11.28	2439.7	
Ind.13:1.48	19.78	11.4	2.06	9.26	0	0	0	2.22	3.7	17.44	2168.26	
Ind.14:12.34	19.72	4.46	2.12	7.08	0	0	0	4.02	2.9	9.82	2070	
Ind.15:1.8	9.68	6.82	2.32	12.28	0	0	0	14.02	1.36	16.7	2051.64	
Ind.16:0.22	12.26	6.14	7.48	16.1	0	0	0	4.64	0.4	14.56	2021.14	
Ind.17:0.36	11.84	15.02	7.46	2.14	0	0	0	1.74	1.48	9	1984.1	
Ind.18:11.26	11.24	4.38	2.28	8.5	0	0	0	9.14	1.78	11.88	1959.64	
Ind.19:6.24	9.74	12.14	0.88	0.1	0	0	0	13.78	6.1	13.14	1951.72	
Ind.20:13.66	4.1	18.48	1.14	0.88	0	0	0	2.24	2.54	7.92	1708.46	

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

En la siguiente figura, puede observarse la evolución del mejor individuo de la población hasta alcanzar la solución óptima. Al igual que en la Figura 3, las 11 primeras columnas, corresponden con el valor que toman las variables N, P, L, T, M, Gn, Gl, Gp, Hm, Hp, Hl. La última, que en esta ocasión se encuentra en la siguiente línea, corresponde al beneficio que se obtendría con los valores asociados de las 11 variables.

Figura 2.15. Solución óptima

28.584	19.8013	45.9144	23.584	21.6963	0	0	0	21.8657	6.1272	29.2974		
6618.25												
83.46	60.2009	226.126	73.1335	46.3958	0	0	0	51.9172	22.3056	41.8933		
21001.8												
2001.61	1758.02	20817.6	1807.27	1375.87	0	0	0	301.993	120.43	182.029		
1.03725e+006												
3906.23	3507.7	20773.9	3698.4	2809.55	0	0	0	375.487	149.632	226.046		
1.29182e+006												
5858.55	5317.67	20727.3	5587.73	4220.46	0	0	0	453.202	181.225	272.633		
1.54974e+006												
7777.95	7036.65	20668.2	7481.65	5701.01	0	0	0	551.933	220.396	331.719		
1.8059e+006												

Fundamentos matemáticos de investigación operativa
Parte III

15525.2 2.83875e+006	14197.8	20449.1	15053.2	11487	0	0	0	915.372	366.348	550.903
17470.1 3.09428e+006	15986.3	20398.3	16909.8	12893.7	0	0	0	998.954	399.873	600.739
19358.2 3.31998e+006	17815.4	20361.4	17999.9	14392	0	0	0	1061.92	424.505	637.877
24945.6 3.86459e+006	23329.7	20240.2	18000	18983.7	0	0	0	1264.78	505.881	759.178
26885 4.02233e+006	24478.5	20207.6	18000	20528.3	0	0	0	1312.86	521.498	791.771
28915.2 4.14398e+006	24478.9	20185.3	17999.9	22254.8	0	0	0	1335.47	521.038	814.588
30623.5 4.24454e+006	24483.8	20174	17999.4	23656	0	0	0	1340.67	515.457	825.685
31999.9 4.32516e+006	24488	20167.9	17998.3	24773.1	0	0	0	1341.67	511.957	832.084
31999.9 4.35057e+006	24479.3	20151	18000	25630.6	0	0	0	1368.67	520.656	848.984
31999.9 4.35063e+006	24481.3	20153	18000	25634.6	0	0	0	1364.67	518.656	846.984
31999.9 4.35063e+006	24481.3	20153	18000	25634.6	0	0	0	1364.67	518.656	846.984
31999.9 4.35151e+006	24516.3	20168	18000	25684.6	0	0	0	1314.67	483.656	831.984
31999.9 4.35233e+006	24549.3	20182	18000	25731.6	0	0	0	1267.67	450.656	817.984
31999.9 4.35354e+006	24598.3	20200	18000	25798.8	0	0	0	1200.67	401.656	799.984
31999.9 4.35444e+006	24634.3	20215	18000	25849.8	0	0	0	1149.67	365.656	784.984
31999.9 4.35583e+006	24691.3	20234	18000	25925.9	0	0	0	1073.67	308.656	765.984
31999.9 4.35673e+006	24729.3	20243	18000	25973.1	0	0	0	1026.67	270.656	756.984
31999.9 4.35779e+006	24773.3	20256	18000	26030.2	0	0	0	969.67	226.656	743.984
31999.9 4.3586e+006	24806.3	20267	18000	26074.2	0	0	0	925.67	193.656	732.984
31999.9 4.36134e+006	24919.3	20303	18000	26223.3	0	0	0	776.67	80.6563	696.984
31999.9 4.36284e+006	24983.3	20317	18000	26301.3	0	0	0	698.67	16.6563	682.984
31999.9 4.36332e+006	24999.3	20335	18000	26335.3	0	0	0	664.67	0.65625	664.984
31999.9 4.36354e+006	24999.3	20366	18000	26366.3	0	0	0	633.67	0.65625	633.984
31999.9 4.36369e+006	24999.3	20387	18000	26387.3	0	0	0	612.67	0.65625	612.984

Fundamentos matemáticos de investigación operativa
Parte III

31999.9 4.36454e+006	24999.3	20509	18000	26509.3	0	0	0	490.67	0.65625	490.984
31999.9 4.36469e+006	24999.3	20531	18000	26531.3	0	0	0	468.67	0.65625	468.984
31999.9 4.36488e+006	24999.3	20557	18000	26557.3	0	0	0	442.67	0.65625	442.984
31999.9 4.36508e+006	24999.3	20586	18000	26586.3	0	0	0	413.67	0.65625	413.984
31999.9 4.36527e+006	24999.3	20614	18000	26614.3	0	0	0	385.67	0.65625	385.984
31999.9 4.36559e+006	24999.3	20659	18000	26659.3	0	0	0	340.67	0.65625	340.984
31999.9 4.3657e+006	24999.3	20675	18000	26675.3	0	0	0	324.67	0.65625	324.984
31999.9 4.36588e+006	24999.3	20700	18000	26700.3	0	0	0	299.67	0.65625	299.984
31999.9 4.36664e+006	24999.3	20809	18000	26809.3	0	0	0	190.67	0.65625	190.984
31999.9 4.36678e+006	24999.3	20829	18000	26829.3	0	0	0	170.67	0.65625	170.984
31999.9 4.36692e+006	24999.3	20849	18000	26849.3	0	0	0	150.67	0.65625	150.984
31999.9 4.36707e+006	24999.3	20870	18000	26870.3	0	0	0	129.67	0.65625	129.984
31999.9 4.36725e+006	24999.3	20896	18000	26896.3	0	0	0	103.67	0.65625	103.984
31999.9 4.36742e+006	24999.3	20920	18000	26920.3	0	0	0	79.6702	0.65625	79.9837
31999.9 4.36758e+006	24999.3	20944	18000	26944.3	0	0	0	55.6702	0.65625	55.9837
31999.9 4.36769e+006	24999.3	20959	18000	26959.3	0	0	0	40.6702	0.65625	40.9837
32000 4.36794e+006	25000	20992	18000	26992	0	0	0	8	0	8
32000 4.368e+006	25000	21000	18000	27000	0	0	0	0	0	0

La decision final recomendada es: 32000 25000 21000 18000 27000
 0 0 0 0 0 con un beneficio de 4.368e+006

Fuente: Larrañaga, Zulueta, Elizagarate, & Alzola, 2020

CAPÍTULO III

OPTIMIZACIÓN CONVEXA

3.1. Introducción

Optimización debería, según (Valencia, 2018), escribirse en una expresión matemática que contenga una o más variables, cuyos valores deben determinarse. La pregunta que se formula, en términos generales, es ¿qué valores deberían tener estas variables para que la expresión matemática tenga el mayor valor numérico posible (maximización) o el menor valor numérico posible (minimización)? A este proceso general de maximización o minimización se lo denomina optimización.

La optimización, también denominada programación matemática, sirve para encontrar la respuesta que proporciona el mejor resultado, la que logra mayores ganancias, mayor producción o felicidad o la que logra el menor costo, desperdicio o malestar. Con frecuencia, estos problemas implican utilizar de la manera más eficiente los recursos, tales como dinero, tiempo, maquinaria, personal, existencias, etc.

Los problemas de optimización generalmente se clasifican en lineales y no lineales, según las relaciones del problema sean lineales con respecto a las variables. Existe una serie de paquetes de software para resolver problemas de optimización. Por ejemplo, QM for Windows, WinQSB, R, Python, Wolfram Mathematica, etcétera resuelven modelos de programas lineales.

3.2. Pasos para resolver los problemas de optimización

Los pasos para resolver los problemas de optimización son (Valencia, 2018):

1. *Definición de variables:* Como primer paso para modelar ordenadamente un problema de optimización, debemos distinguir qué variables son aquellas sobre las que vamos a tomar decisiones en el problema, siendo cuidadosos y definidas en forma concreta. Estas variables por lo general las podemos identificar en la pregunta del problema y generalmente se designan con letras sub-indizadas. Cada variable debe presentar una cantidad que corresponda a una misma unidad de medida (utilidad, horas, artículos, precios, entre otros).

$$x_1, x_2, \dots, x_n = \text{Variables del problema}$$

2. *Determinación de la función objetivo:* Es la ecuación matemática que representa el objeto planteado, que se expresa mediante una función lineal de la combinación de las variables discretas en la pregunta del problema; puede generar un mayor cuando se trata de maximizar beneficios y en un menor valor cuando se trata de minimizar costos.

$$Z(\text{max o min}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Donde:

$Z(\text{max o min}) =$ Función objetivo del problema (F. O.).

$c_1, c_2, \dots, c_n =$ Coeficientes unitarios que acompañan a las variables en la F. O. (beneficios, costos, precios, etcétera)

x_1, x_2, \dots, x_n = Variables del problema, donde se quiere llegar.

3. *Planteamiento de las restricciones*: Representan las condiciones y/o recursos a las que está expuesto el problema y se muestran por medio de desigualdad de tipo lineal, sean físicas, económicas, técnicas, entre otras.

$$\left| \begin{array}{ccccccccccc} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & A_{13}x_3 & + & \dots & + & A_{1n}x_n & T_1 & B_1 \\ A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & A_{23}x_3 & + & \dots & + & A_{2n}x_n & T_2 & B_2 \\ A_{31}x_1 & + & A_{32}x_2 & + & A_{33}x_3 & + & \dots & + & A_{3n}x_n & T_3 & B_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & A_{m3}x_3 & + & \dots & + & A_{mn}x_n & T_n & B_n \end{array} \right|$$

Donde:

A_{ij} = Coeficiente que acompaña a las variables en las restricciones.

x_1, x_2, \dots, x_n = Variables de decisión del problema.

T_1, T_2, \dots, T_n = Signo de restricción del problema ($\geq, \leq, =$).

B_1, B_2, \dots, B_n = Disponibilidad del problema.

Para la asignación de los signos, con respecto a la disponibilidad, no pueden tener una desigualdad estricta con los signos \geq o \leq , deben ser con los signos \geq, \leq o $=$.

Con frecuencia, las restricciones suelen ir con signo \leq cuando se trata de maximización y con el signo \geq cuando se trata de minimización; además, no es una regla general, se pueden identificar los signos de las restricciones mediante la terminología en los enunciados tales como:

- Para \geq : '*mayor o igual a*', '*al menos*', '*por lo menos*', etcétera.
- Para \leq : '*menor o igual a*', '*a lo mucho*', '*cuando mucho*', etcétera.
- Para $=$: '*igual a*', '*únicamente*', '*un total de*', etcétera.

Para el planteamiento de las restricciones se puede hacer uso de una tabla (opcional) facilitará la identificación de los recursos, donde las variables de las restricciones deben estar siempre en las mismas unidades; en otras palabras, si un recurso está dado por horas, los espacios correspondientes a las variables tendrán que estar en horas, y por ende la disponibilidad también deberá estar en horas, caso contrario se tendrá que realizar la conversión de unidades.

Tabla 3.1. Identificación de recursos

Recursos	Variables				Disponibilidad
Mano de obra (horas)	x_1	x_2	...	x_n	Horas
	Horas	Horas	Horas	Horas	

Fuente: Valencia, 2018

4. *Condiciones de no negatividad*: Son restricciones adicionales que nos indican que las soluciones obtenidas deben ser siempre positivas, es decir, mayores o igual a cero.

$$x_n \geq 0$$

5. *Condiciones de optimización*: Es la utilización de algún método para la resolución del problema, el mismo que nos ayudará a interpretar la solución, pueden ser:

- Método gráfico.
- Método simplex primal.
- Método simplex dual.
- Modelo de transporte.

3.3. Convexidad

Según (Garcés, 2020), los problemas de optimización convexa son aquellos que se pueden definir en un espacio de soluciones convexo. Para ello, debemos identificar claramente cuando este espacio es convexo. Comencemos por la definición formal.

Definición (Conjunto convexo). *Decimos que un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, si para cualquier par de puntos $x, y \in \Omega$ tenemos que*

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in \Omega$$

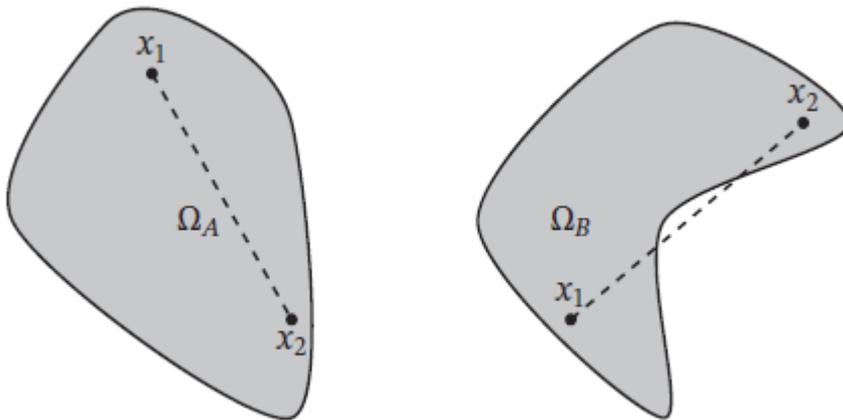
Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$.

En términos simples, un conjunto es convexo si podemos elegir cualquier par de puntos dentro de este conjunto de forma que la semirrecta que une dichos puntos también pertenezca al conjunto. Desde luego, en problemas de optimización, no todos los conjuntos son convexos, aunque una gran cantidad de problemas prácticos tienen espacios convexos.

En la siguiente figura se observa que esta condición se cumple para cualquier par de puntos arbitrarios en el caso de Ω_A mientras que en Ω_B existen puntos que pertenecen al segmento de recta, pero que se salen del espacio; por lo tanto, Ω_A es convexo mientras que Ω_B es no convexo.

Esta intuición geométrica es útil para problemas en \mathbb{R}^2 ; no obstante, el caso general requiere el uso de la definición, como se muestra a continuación (Garcés, 2020):

Figura 3.1. Intuición geométrica



Fuente: Garcés, 2020

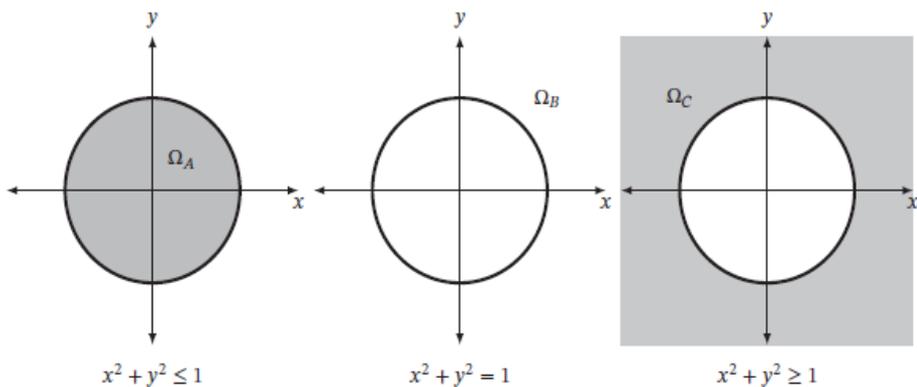
Ejemplo 1: Considere un espacio afín dado por $Ax = b$, dos puntos x, y que pertenecen al espacio; ahora tomemos un tercer punto $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$.

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ Ay &= b \\ (1 - \lambda)Ax + \lambda Ay &= (1 - \lambda)b + \lambda b \\ Az &= b \end{aligned}$$

Este último indica que λ también pertenece al espacio afín.

Ejemplo 2: La definición de conjuntos convexos puede ser engañosa a simple vista. Consideremos, por ejemplo, conjuntos generados por una bola en \mathbb{R}^2 , como se muestra en la figura siguiente, Podemos definir claramente tres conjuntos (Garcés, 2020):

Figura 3.2. Conjuntos convexos



Fuente: Garcés, 2020

$$\begin{aligned}\Omega_A &= \{(x, y): x^2 + y^2\} \leq 1 \\ \Omega_B &= \{(x, y): x^2 + y^2\} = 1 \\ \Omega_C &= \{(x, y): x^2 + y^2\} \geq 1\end{aligned}$$

A pesar de la similitud evidente entre estos tres conjuntos, una simple inspección sobre la definición nos muestra que Ω_A es convexo mientras Ω_B y Ω_C no lo son. De hecho, los problemas de optimización sobre los conjuntos Ω_B y Ω_C son extremadamente complejos (combinatoriales) mientras que los problemas de optimización sobre conjuntos como Ω_A son relativamente más simples.

Es fácil demostrar que la definición se puede extender a varios puntos, es decir, si $\Omega \in \mathbb{R}^N$ es un conjunto convexo con $x_k \in \Omega$ y $\alpha_k \in \mathbb{R}$; entonces, $\sum \alpha_k x_k \in \Omega$ si $\sum \alpha_k = 1$. Algunas operaciones entre conjuntos preservan la convexidad, por ejemplo, la intersección.

Lema. *La intersección de conjuntos convexos genera un conjunto convexo. Demostración.* Sea $\mathcal{C} = \bigcap C_i$. En caso de que \mathcal{C} sea no vacío, tomamos dos puntos $x, y \in \mathcal{C}$ seleccionamos un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$. Evidentemente, $x, y \in C_i$ pues tanto x como y pertenecen a la intersección de C_i . Además, $z = (1 - \lambda)x + \lambda y \in C_i$ pues cada uno de los conjuntos es convexo; por tanto, $z \in \mathcal{C}$ con lo que se concluye que \mathcal{C} es convexo

Este lema permite identificar fácilmente un espacio de soluciones convexo, pues solo se requiere analizar la convexidad de cada una de las restricciones. Es decir, si tenemos un espacio de soluciones representado por ecuaciones de la forma (Garcés, 2020):

$$\begin{aligned}g_1(x) &\leq 0 \\g_2(x) &\leq 0 \\g_3(x) &\leq 0\end{aligned}$$

entonces es suficiente con demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos es convexo, $\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n: f_i(x) \leq 0\}$. Esto es una ventaja teórica pero también computacional a la hora de convertir nuestros problemas en algoritmos.

Cabe resaltar que la unión de conjuntos convexos no genera, necesariamente, un conjunto convexo (considérese, por ejemplo, en la

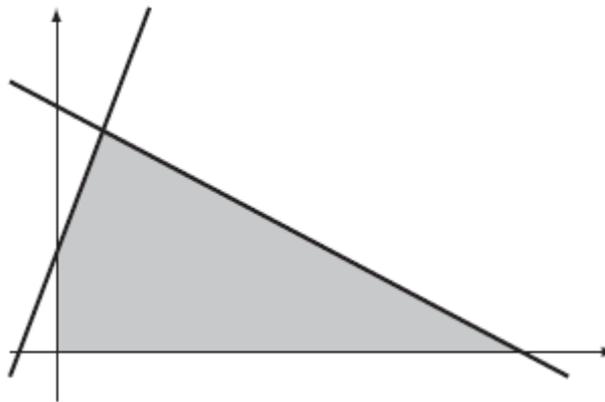
unión de dos conjuntos como Ω_A , en donde se ha desplazado el origen en uno de ellos).

Ejemplo 3: Consideremos la intersección de cuatro espacios afines, a saber:

$$\begin{aligned}\Omega_A &= \{(x_1, x_2): x_1 + 2x_2 \leq 10\} \\ \Omega_B &= \{(x_1, x_2): -5x_1 + 2x_2 \leq 4\} \\ \Omega_C &= \{(x_1, x_2): x_1 \geq 0\} \\ \Omega_D &= \{(x_1, x_2): x_2 \geq 0\}\end{aligned}$$

La figura siguiente muestra que esta intersección constituye un conjunto convexo, llamada politopo. En las siguientes subsecciones, estudiaremos en detalle este y otros conjuntos convexos que son clásicos en problemas de ingeniería.

Figura 3.3. Politopo



Fuente: Garcés, 2020

Un politopo, como la figura anterior, se puede escribir de la siguiente forma canónica:

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax \leq b\}$$

Ahora, tomamos dos puntos $x \in \mathcal{P}$, $y \in \mathcal{P}$ el segmento de recta $\alpha x + \beta y$ con $\alpha + \beta = 1$ y $0 \leq \alpha \leq 1$. Nótese que esto es equivalente a la representación $(1 - \lambda)x + \lambda y$ mostrada en la ecuación $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \Omega$; por tanto, obtenemos lo siguiente (Garcés, 2020):

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ Ay &\leq b \\ \alpha Ax &\leq \alpha b \\ \beta Ay &\leq \beta b \\ A(\alpha x + \beta y) &\leq b \end{aligned}$$

Dado lo anterior, podemos concluir que el punto $\alpha x + \beta y$ pertenece al polítopo y, por tanto, el conjunto es convexo.

Definición (bola). *Una bola de radio δ alrededor de un punto x_0 es un conjunto definido de la siguiente forma:*

$$\beta_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x - x_0\| \leq \delta\}$$

En donde $\|\cdot\|$ representa una amplitud, magnitud, módulo o norma cualquiera. Para demostrar que este conjunto es convexo, solo requerimos usar la desigualdad triangular en un nuevo punto $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ en donde $x, y \in \beta_\delta(x_0)$. Así,

$$\begin{aligned} \|z - x_0\| &= \|(1 - \lambda)x + \lambda y - (1 - \lambda + \lambda)x_0\| \\ &\leq \|(1 - \lambda)x - x_0\| + \|\lambda y - \lambda x_0\| \\ &\leq (1 - \lambda)\|x - x_0\| + \lambda\|y - x_0\| \\ &\leq (1 - \lambda)\delta + \lambda\delta = \delta \end{aligned}$$

Con esto concluimos $z \in \beta_\delta(x_0)$; por tanto, el conjunto es convexo. Nótese que esta propiedad es independiente del tipo de norma utilizada.

Definición (elipsoide). *Un elipsoide es un conjunto definido como sigue:*

$$\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n: (x - x_0)^T A(x - x_0) \leq b^2\}$$

En donde A es una matriz simétrica y definida positiva.

Es fácil demostrar que ε es, de hecho, una bola de radio b para la siguiente norma

$$\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$$

Esta última cumple con todas las propiedades de la definición $Q(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 15$; es decir, $\|x\|_A \leq 0$ (definida positiva), $\|x\|_A = 0$ cuando $x = 0$ la desigualdad triangular; es decir (Garcés, 2020):

$$\|x + y\|_A^2 = (x + y)^T A(x + y) = x^T A x + y^T A y + 2x^T A y$$

Ahora, usamos la desigualdad de Cauchy para obtener:

$$x^T A y \leq \sqrt{(x^T A x)(y^T A y)}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_A^2 &\leq x^T A x + y^T A y + 2\sqrt{(x^T A x)(y^T A y)} \\ \square &= \|x\|_A^2 + \|y\|_A^2 + 2\|x\|_A \|y\|_A \\ \square &= (\|x\|_A + \|y\|_A)^2 \end{aligned}$$

Cuando A es semi definida, se puede analizar de forma similar; aunque, en tal caso, no

se trata necesariamente de una norma.

Definición. *Un mapa no expansivo en \mathbb{R}^n es una función $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que cumple con la siguiente propiedad*

$$\|T(x) - T(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2$$

En donde $\|\cdot\|$ representa la norma-2. Este tipo de mapas permite representar el siguiente conjunto:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n: x = T(x)\}$$

Dicho de otro modo, \mathcal{D} corresponde a los puntos fijos de T . Este conjunto es convexo; para demostrarlo, consideremos dos teoremas básicos tomados. Omitimos el subíndice entendiendo que se trata de la norma-2.

Teorema. *Si x, y y dos vectores en \mathbb{R}^n y λ un escalar positivo entonces se cumple que:*

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1 - \lambda)\|y\|^2 - \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

Donde $\|\cdot\|$ es la norma-2. *Demostración.* Simplemente expandimos el lado izquierdo de la expresión como sigue:

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + (1 - \lambda)^2\|y\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)x^T y$$

Consideremos ahora la siguiente identidad:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x^T y$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 &= \lambda^2\|x\|^2 + (1 - \lambda)^2\|y\|^2 \\
 &+ \lambda(1 - \lambda)(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) \\
 &= \lambda\|x\|^2 + (1 - \lambda)\|y\|^2 - \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2
 \end{aligned}$$

Por lo que queda demostrada la relación.

Teorema. Sea $x \in \Omega, y \in \Omega$ entonces $x = T(x), y = T(y)$.
Consideremos ahora un punto z en el segmento x, y dado por $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, a saber:

$$\begin{aligned}
 \|z - T(z)\| &= \|\lambda x + (1 - \lambda)y - T(z)\| \\
 \square &= \|\lambda x + (1 - \lambda)y - (1 + \lambda - \lambda)T(z)\| \\
 \square &= \|\lambda(x - T(z)) + (1 - \lambda)(y - T(z))\|
 \end{aligned}$$

Ahora usemos el teorema $(1 - \lambda)c + \lambda y \in \Omega$ (Garcés, 2020):

$$\begin{aligned}
 \|\lambda(x - T(z)) + (1 - \lambda)(y - T(z))\|^2 &= \lambda\|x - T(z)\|^2 + (1 - \lambda)\|y - T(z)\|^2 \\
 &- \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2
 \end{aligned}$$

Dado que $x = T(x), y = T(y)$; entonces, tenemos lo siguiente:

$$\|T(x) - T(z)\| \leq \|x - z\|$$

Lo mismo decimos de y ; por tanto, tenemos que:

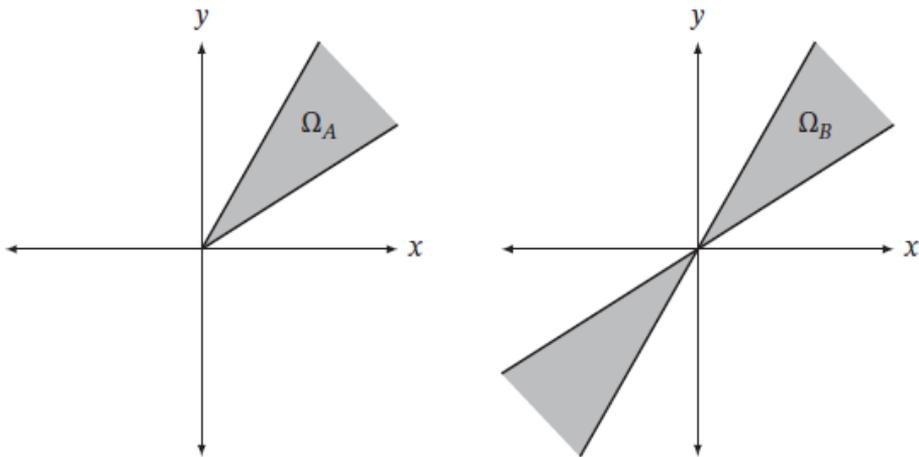
$$\begin{aligned}
 \|z - T(z)\| &= \sqrt{\lambda\|T(x) - T(z)\|^2 + (1 - \lambda)\|T(y) - T(z)\|^2 - \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2} \\
 \square &\leq \sqrt{\lambda\|x - z\|^2 + (1 - \lambda)\|y - z\|^2 - \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2} \\
 \square &= \sqrt{\lambda\|x - (\lambda x + (1 - \lambda)y)\|^2 + (1 - \lambda)\|y - (\lambda x + (1 - \lambda)y)\|^2 - \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2} \\
 \square &= \sqrt{\lambda(1 - \lambda)^2\|x - y\|^2 + (1 - \lambda)\lambda^2\|x - y\|^2 - \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2} \\
 \square &= \sqrt{(\lambda)(1 - \lambda)\|x - y\|^2(1 - \lambda + \lambda - 1)} = 0
 \end{aligned}$$

Esto significa que $\|z - T(z)\| = 0$ lo que implica que $z = T(z)$ y, por tanto, $z \in \Omega$; es decir, el conjunto Ω es convexo.

Definición (conos convexos). *Un cono es un subconjunto \mathcal{C} sobre un espacio lineal tal que, para cada $x \in \mathcal{C}$ y un número escalar positivo α , se tiene que $\alpha x \in \mathcal{C}$.*

El concepto de cono es intuitivo y la diferencia entre un cono convexo y un cono no convexo puede ser fácilmente observada en la siguiente figura.

Figura 3.4. Cono intuitivo y convexo



Fuente: Garcés, 2020

En particular, estamos interesados en tres tipos de conos convexos que serán de utilidad en diferentes aplicaciones, estos son (Garcés, 2020):

- Cono asociado a la forma canónica de los problemas de programación lineal

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax = b, x \geq 0\}$$

- Cono de segundo orden

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n: \|Ax + b\| \leq c^x + d\}$$

- Cono de las matrices semi definidas

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^{n \times n}: X \succeq 0\}$$

Se ha aprendido que el conjunto de los polinomios en x forman un espacio lineal. Ahora, consideremos el subconjunto de los polinomios que se pueden escribir como la suma de polinomios al cuadrado; es decir:

$$\mathcal{g} = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x]: p(x) = \sum_t (m_t(x))^2 \right\}$$

en donde $m_t(x)$ son polinomios. Para ver que este conjunto es convexo, consideremos dos polinomios $p(x) \in \mathcal{g}$ y $q(x) \in \mathcal{g}$. Obviamente, $\lambda p(x)$ y $(1 - \lambda)q(x)$ también son polinomios y como $\lambda \geq 0, (1 - \lambda) \geq 0$; entonces, el nuevo polinomio $s(x) = \lambda p(x) + (1 - \lambda)q(x)$; también, pertenece a \mathcal{g} .

El conjunto de los polinomios representables como suma de polinomios cuadrados forma una interesante gama de problemas de optimización que serán estudiados en el capítulo ocho.

Definición (funciones convexas). Decimos que una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si su dominio es convexo y además, para cualquier par de puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$. De otro lado, si $-f(x)$ es convexa entonces decimos que $f(x)$ es cóncava. Esta ecuación también se puede escribir como:

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y) \text{ con } \alpha + \beta = 1$$

Al igual que en el caso de los conjuntos convexos, podemos extender nuestra definición a varios puntos del espacio; es decir:

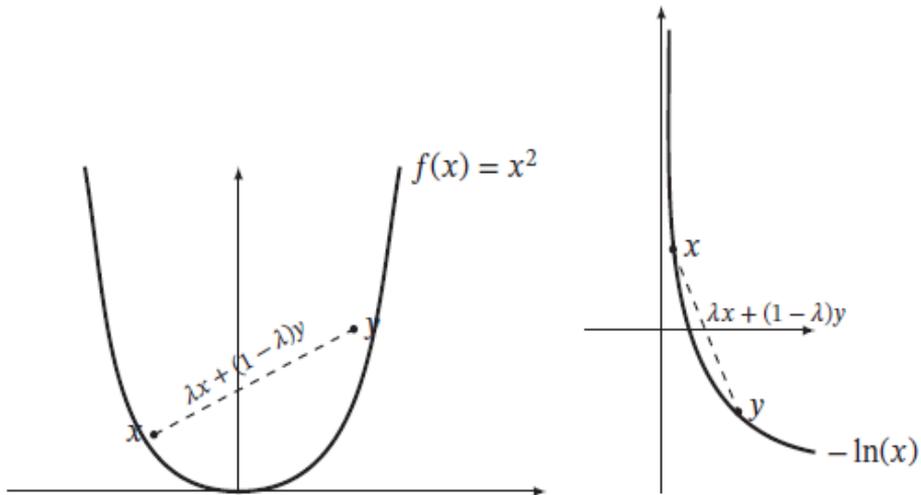
$$f\left(\sum_t \alpha_i x_i\right) \leq \sum_i \alpha_i f(x_i), \text{ con } \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1$$

Usaremos una u otra definición según sea conveniente (Garcés, 2020). Una función convexa implica que cualquier segmento de recta entre dos puntos x, y está por encima de la función, como se muestra en la siguiente figura para el caso de las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = -\ln(x)$.

Ejemplo 1: Verifiquemos que $f(x) = x^2$ es convexa usando la definición. Veamos:

$$\begin{aligned} & (\lambda x + (1 - \lambda)y)^2 && \leq \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 \\ & \lambda^2 x^2 + (1 - \lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1 - \lambda)xy && \leq \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 \\ (\lambda^2 - \lambda)x^2 + ((1 - \lambda)^2 - (1 - \lambda))y^2 + 2\lambda(1 - \lambda)xy && \leq & 0 \\ & (\lambda^2 - \lambda)x^2 + (\lambda^2 - \lambda)y^2 + 2\lambda(1 - \lambda)xy && \leq & 0 \\ & (\lambda^2 - \lambda)(x^2 + y^2 - 2xy) && \leq & 0 \\ & (\lambda^2 - \lambda)(x - y)^2 && \leq & 0 \end{aligned}$$

Figura 3.5. Función convexa



Fuente: Garcés, 2020

Esto último es cierto para todos los reales debido a que $0 \leq \lambda \leq 1$; por tanto, se cumple la desigualdad y se concluye que la función $f(x) = x^2$ es convexa (Garcés, 2020).

Lema (suma de funciones convexas). Sean $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones convexas; entonces, $h(x) = f(x) + g(x)$ es también una función convexa. *Demostración:* Solo basta sumar las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &\leq \alpha f(x) + \beta f(y) \\ g(\alpha x + \beta y) &\leq \alpha g(x) + \beta g(y) \end{aligned}$$

En donde:

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha x + \beta y) + g(\alpha x + \beta y) \\ &\leq \alpha(f(x) + g(x)) + \beta(f(y) + g(y)) \\ &= \alpha h(x) + \beta h(y) \end{aligned}$$

Dado lo anterior, se concluye que h también es convexa.

Lema. Una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y solo si la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(x + tv)$ es también convexa para todos los valores de $x \in \text{dom}(f)$ y $t \in \mathbb{R}$. *Demostración.* Nótese que g es una función en una sola variable mientras que es una función en múltiples variables. Debemos demostrar que g convexa implica f convexa y viceversa. Primero, asumimos que f es convexa; entonces, para un par de puntos t, s y dos escalares $\alpha + \beta = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} g(\alpha t + \beta s) &= f(x + (\alpha t + \beta s)v) \\ &= f(\alpha(x + vt) + \beta(x + vs)) \\ &\leq \alpha f(x + vt) + \beta f(x + vs) \\ &\leq \alpha g(t) + \beta g(s) \end{aligned}$$

Con esto concluimos que g es convexa. Ahora, para demostrar el lema en sentido opuesto, asumimos que g es convexa, entonces tenemos lo siguiente:

$$g(\alpha t_1 + \beta t_2) \leq \alpha g(t_1) + \beta g(t_2)$$

Definimos las dos variables $y_1 = x + vt$ y $y_2 = x + vs$ las cuales permiten concluir fácilmente que f también es convexa.

Definición (epígrafo). Dada una función convexa $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definimos el epígrafo de f denotado como $\text{epi}(f)$ de la siguiente forma

$$\text{epi}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n: f(x) \leq t\}$$

Los epígrafos desempeñan un papel importante en diferentes problemas de optimización (Garcés, 2020).

Lema. Una función es convexa si y solo si su epígrafo definido como $\text{epi}(f)$ es un conjunto convexo. *Demostración:* Debemos comprobar que $\text{epi}(f)$ convexo implica f convexa y que f convexa implica $\text{epi}(f)$ convexo. Como f es convexa entonces $\alpha f(x) + \beta f(y) \geq f(\alpha x + \beta y)$ con $\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$. Consideremos dos reales t, r tales que $t \geq f(\alpha x + \beta y)$ y $r \geq f(\alpha x + \beta y)$; por lo tanto, $\alpha t + \beta r \geq (\alpha + \beta)f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x + \beta y)$; es decir, que $(\alpha t + \beta r, \alpha x + \beta y) \in \text{epi}(f)$. Por tanto, $\text{epi}(f)$ es un conjunto convexo. La demostración en sentido contrario sigue un argumento similar.

Lema. El supremo una colección de funciones convexas es también una función convexa, i. e.:

$$g(x) = \sup_i \{f_i(x)\}$$

Demostración. Consideremos un punto intermedio entre dos puntos x, y

$$g(\alpha x + \beta y) = \sup_i \{f_i(\alpha x + \beta y)\}$$

Como cada f_i es convexa entonces tenemos

$$\begin{aligned} g(\alpha x + \beta y) &\leq \alpha \sup_i \{f_i(x)\} + \beta \sup_i \{f_i(y)\} \\ &= \alpha g(x) + \beta g(y) \end{aligned}$$

Dado lo anterior, podemos concluir que g también es convexa.

Lema. La descomposición de una función convexa y una función afín resulta en una función convexa. Es decir, si $f: \mathcal{D} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa; entonces, $g(x) = f(Ax + b)$ es también convexa para una matriz

constante A y un vector b . *Demostración:* Nuevamente tomamos un punto intermedio entre dos puntos arbitrarios x, y , a saber:

$$\begin{aligned} g(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha Ax + \beta Ay + (\alpha + \beta)b) \\ \square &\leq \alpha f(Ax + b) + \beta f(Ay + b) \\ \square &= \alpha g(x) + \beta g(y) \end{aligned}$$

Lema. Si f, g son funciones convexas con g monotonamente creciente entonces la composición de f o g , dada por $h(x) = g(f(x))$, es también convexa. *Demostración.* Partimos del hecho de que f es convexa y, por tanto,

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Ahora, como g es monótonamente creciente, podemos aplicarla sin modificar la desigualdad (Garcés, 2020)

$$g(f(\alpha x + \beta y)) \leq g(\alpha f(x) + \beta f(y))$$

Finalmente, como g también es convexa, entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta y) &= g(f(\alpha x + \beta y)) \\ \square &\leq \alpha g(f(x)) + \beta g(f(y)) \\ \square &= \alpha h(x) + \beta h(y) \end{aligned}$$

Dado lo anterior, podemos concluir que h también es convexa.

Definición (optimización convexa). Un problema de optimización matemática de la forma

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \square \quad & x \in \Omega \end{aligned}$$

es un problema de optimización convexa si la función objetivo f es convexa y el espacio de soluciones Ω es un conjunto convexo.

En términos prácticos, un problema de optimización de la forma

$$\begin{array}{llll} \min & f(x) & \square & \\ & x & \square & \square \\ & g_i(x) & = & 0 \\ & h_j(x) & \leq & 0 \end{array}$$

es convexo, si tanto f como h_j son funciones convexas y g_t son funciones afines. Los problemas de optimización convexa tienen características teóricas interesantes y pueden ser solucionados eficientemente. De hecho, podemos asegurar que la complejidad computacional de un problema está mucho más relacionada con la convexidad que con la linealidad.

Por ejemplo, un problema convexo y cuadrático suele ser computacionalmente menos demandante que un problema de programación lineal-entera. Por ello, es importante establecer condiciones de convexidad, así como formas de aproximaciones convexas.

A continuación, se enumeran algunos problemas que podemos resolver usando optimización convexa (Garcés, 2020):

Programación lineal (LP):

$$\begin{array}{ll} \min & c'x \\ \square & Ax \leq b \end{array}$$

Programación cuadrática (QP):

$$\begin{aligned} \min \quad & \left(\frac{1}{2} x^T H x \right) + c^T x \\ \square \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

Con $H \succcurlyeq 0$.

Programación cuadrática con restricciones cuadráticas (QCQP):

$$\begin{aligned} \min \quad & \left(\frac{1}{2} x^T H x \right) + c^T x \\ \square \quad & x^T Q_i x + a_i x \leq b_i \end{aligned}$$

Con $H \succcurlyeq 0, Q_i \succcurlyeq 0$.

Programación geométrica:

$$\begin{aligned} \min \sum_k c_k \left(\prod_m x_m^{a_m} \right) \quad & \square \quad \square \\ \sum_k h_k \left(\prod_m x_m^{b_m} \right) \quad & \leq \quad 1 \\ \left(\prod_m x_m^{d_m} \right) \quad & = \quad 1 \end{aligned}$$

Programación semi definida:

$$\begin{aligned} \min Tr(CX) \quad & \square \quad \square \\ Ax \quad & = \quad B \\ X \quad & > \quad 0 \end{aligned}$$

Programación cónica de segundo orden:

$$\begin{aligned} \min c^T x & \quad \square \quad \square \\ \|A_i x + b_i\| & \leq h_i x + m_i \end{aligned}$$

Suma de polinomios cuadráticos:

$$\begin{aligned} \min c^T x & \quad \square \\ \square & \quad \sum f_i(x) \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

Optimización de punto fijo:

$$\begin{aligned} \min f(x) & \quad \square \quad \square \\ x = T(x) & \quad : \quad \text{con } T \text{ un mapa no - expansivo} \end{aligned}$$

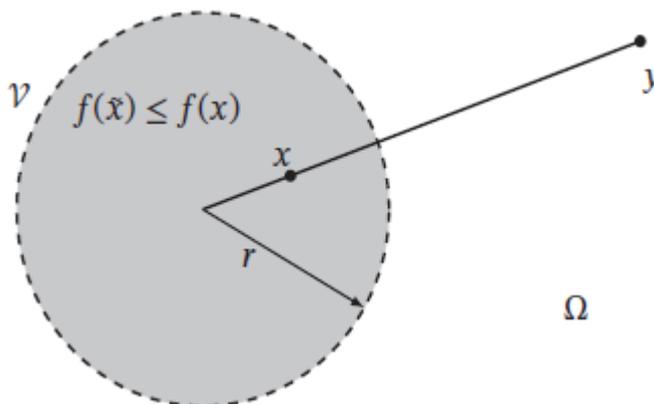
Teorema (óptimo global). *En un problema de optimización convexa, todo óptimo local es un óptimo global. Demostración.* Consideremos un problema de optimización en donde conocemos un óptimo local \tilde{x} :

$$f(\tilde{x}) = \inf\{f(x): x \in \Omega\}$$

En donde \mathcal{H} es la vecindad del óptimo \tilde{x} (i.e, un óptimo local), $\|\cdot\|$ es una norma arbitraria r es un número positivo que permite definir la vecindad de \tilde{x} como se muestra en la ecuación y figura siguientes:

$$v = \{x \in \Omega, \|x - \tilde{x}\| < r\}$$

Figura 3.6. Optimización convexa



Fuente: Garcés, 2020

Sea $y \in \Omega$ un punto factible por fuera de la vecindad de \tilde{x} . Dado que Ω es convexo tenemos que:

$$x = \alpha \tilde{x} + \beta y$$

En donde $\alpha + \beta = 1$ y $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$. Ahora, puesto que f es una función convexa sabemos que (Garcés, 2020):

$$f(x) \leq \alpha f(\tilde{x}) + \beta f(y)$$

Evidentemente, $f(\tilde{x}) \leq f(x)$ puesto que x se encuentra en la vecindad de \tilde{x} , esto es:

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) \leq f(x) &\leq \alpha f(\tilde{x}) + \beta f(y) \\ (1 - \alpha)f(\tilde{x}) &\leq \beta f(y) \\ \beta f(\tilde{x}) &\leq \beta f(y) \\ f(\tilde{x}) &\leq f(y) \end{aligned}$$

En conclusión, cualquier punto factible por fuera de la vecindad de \tilde{x} es también mayor que $f(\tilde{x})$ que significa \tilde{x} es un óptimo en todo el espacio

Ω (i.e. es un óptimo global). Este es probablemente el resultado más importante asociado a los problemas convexos y una de las razones por la cual nos interesa su estudio.

Definición (función estrictamente convexa). Decimos que una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente convexa si

$$f(\alpha x + \beta y) < \alpha f(x) + \beta f(y) \text{ on}$$

Con $x + y = 1, 0 \leq \alpha \leq 1$ y además $x \neq y$.

Esta definición nos permite demostrar el siguiente resultado:

Teorema. Consideremos el siguiente problema de optimización convexa, a saber:

$$\min f(x), \quad x \in \Omega$$

en donde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función estrictamente convexa con Ω un conjunto convexo; entonces, el óptimo (si existe) es único.

Demostración. Usaremos un argumento de reducción al absurdo, para ello, suponemos que existen dos puntos óptimos \tilde{x} y \tilde{y} . Entonces, debido a la condición de globalidad de la solución tenemos que

$$f(\tilde{x}) = f(\tilde{y}) \leq f(z)$$

para todo $z \in \Omega$. Consideremos ahora un punto intermedio $z = \alpha \tilde{x} + \beta \tilde{y}$. Como Ω es convexo entonces este punto debe pertenecer al espacio de soluciones factibles. En esa dirección, como la función es estrictamente convexa (Garcés, 2020):

$$f(z) < \alpha f(\tilde{x}) + \beta f(\tilde{y}) = f(\tilde{x}) = f(\tilde{y})$$

Sin embargo, $f(z) < f(\tilde{x})$ contradice nuestra suposición inicial. Por tanto, no pueden existir dos puntos óptimos diferentes.

Definición (función fuertemente convexa). *Decimos que una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, continua y doblemente diferenciable, es fuertemente convexa si existe un $\mu > 0$ tal que la función g , dada por la siguiente ecuación sea convexa. Así:*

$$g(x) = f(x) - \mu \|x\|^2$$

Lema. *Toda función fuertemente convexa es estrictamente convexa.*

Demostración. Como $g(x)$ es convexa entonces tenemos

$$g(\alpha x + \beta y) \leq \alpha g(x) + \beta g(y)$$

es decir,

$$f(\alpha x + \beta y) - \mu \|\alpha x + \beta y\|^2 \leq \alpha f(x) + \beta f(y) - \mu \alpha \|x\|^2 - \beta \mu \|y\|^2$$

Ahora, definimos una nueva variable $h(x, y)$ como sigue:

$$h(x, y) = -\mu \alpha \|x\|^2 - \beta \mu \|y\|^2$$

Por lo tanto,

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y) + h(x, y)$$

En este punto, usando el Teorema $\min c^T x$ $\begin{cases} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{cases}$ teniendo en cuenta

que $h(x, y) = -\mu\alpha\beta\|x - y\|^2$, que es siempre un término negativo para $x \neq y$. Dado lo anterior, podemos concluir que la desigualdad $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$ se cumple estrictamente (Garcés, 2020).

Una de las formas más simples y comúnmente usadas para encontrar modelos convexos, consiste en la linealización de las restricciones no lineales; especialmente, las restricciones de igualdad.

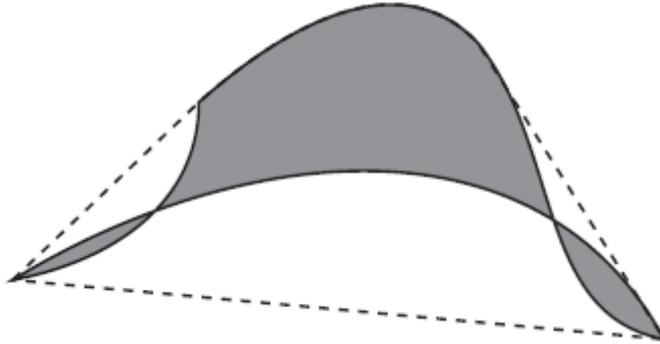
Este enfoque es adecuado en espacios de baja curvatura que puedan ser aproximados por un hiperplano. No obstante, muchos problemas se mueven en rangos de operación en donde las linealizaciones son insuficientes para modelar el problema.

Además, el uso de linealizaciones puede ser innecesario, ya que algunas restricciones no-lineales pueden ser transformadas en problemas SDP o SOC. En algunos casos, la expansión de la función en polinomios de Taylor puede ser truncada hasta obtener una ecuación cuadrática o incluso SOS. Estas son tratables con las metodologías presentadas hasta el momento.

La recomendación general es evitar las linealizaciones en aras de obtener convexificaciones, es decir, equivalentes convexos que preserven las características no lineales del modelo y que sean tratables computacionalmente con los métodos de optimización convexa. Un enfoque alternativo e igualmente práctico es el uso de envolventes convexas.

Definición. La envolvente convexa de un conjunto $S \in \mathbb{R}^n$ es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S .

Figura 3.7. Envolvente convexa



Fuente: Garcés, 2020

La figura anterior muestra el ejemplo de una envolvente convexa, asociada a un conjunto no convexo. El conjunto original es la región sombreada y la envolvente convexa es la región marcada con líneas punteadas. En el caso de un conjunto de puntos discretos, la envolvente convexa es el polígono mínimo que abarca a todos los puntos.

En general, la envolvente convexa es una forma simple de generar un problema convexo, asociado a un espacio no convexo. Desde luego, se trata de una aproximación, pero en algunos casos, esta aproximación es suficiente para encontrar soluciones prácticas a complejos problemas de optimización.

Cabe mencionar que la envolvente convexa de un conjunto no convexo mantiene las no-linealidades en las zonas convexas del conjunto, linealizando exclusivamente en las zonas no convexas. De esta forma, se preserva parte de la geometría del espacio de soluciones.

En optimización convexa secuencial, consideramos el siguiente problema de optimización:

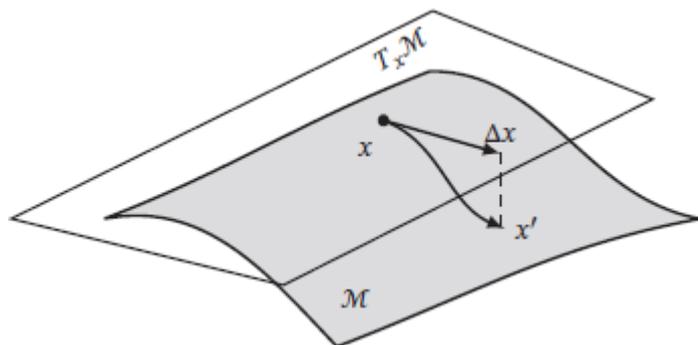
$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & x \in \mathcal{M} \end{array}$$

Allí, $f(x)$ es una función convexa pero el espacio \mathcal{M} no es convexo. Una forma de encontrar un óptimo local a este problema es mediante sucesivas linealizaciones de \mathcal{M} alrededor de un punto x , como se muestra en la siguiente figura. En este caso, obtenemos un nuevo punto $x_n = \varphi(\Delta x)$ que pertenece al espacio y sobre el cual se puede linealizar nuevamente. Definimos $T_x\mathcal{M}$ como espacio tangente en el punto x . Lo anterior genera el siguiente problema de optimización convexa, a saber (Garcés, 2020):

$$\begin{array}{ll} \min & f(\Delta x) \\ \text{s.t.} & \Delta x \in T_x\mathcal{M} \end{array}$$

La solución Δx de este problema se encuentra en $T_x\mathcal{M}$ por lo que se requiere proyectar este punto al espacio original \mathcal{M} y encontrar un nuevo punto x' . Esta proyección supone, en algunos casos, resolver numéricamente un sistema no lineal de ecuaciones mediante el método de Newton-Rapshon.

Figura 3.8. método de Newton-Rapshon



Fuente: Garcés, 2020

Ahora, redefinimos el espacio tangente en el nuevo punto $T_x \mathcal{M}$ y repetimos el procedimiento hasta alcanzar convergencia. En caso de que f sea una función no convexa, podemos generar una linealización con el objetivo de que cada sub-problema sea convexo.

El método tiene múltiples variantes, por ejemplo, podemos generar aproximaciones cuadráticas a la función objetivo y plantear una secuencia de problemas de optimización cuadrática. La principal dificultad de este enfoque se encuentra en el cálculo de la matriz hessiana de f que puede ser costosa computacionalmente.

En la práctica, el método suele converger en pocas iteraciones, aunque es importante destacar que solo podemos encontrar un óptimo local al problema.

En las aproximaciones semi definidas, algunas restricciones no convexas pueden ser aproximadas a restricciones semi definidas usando un simple cambio de variable. Consideremos; por ejemplo, la siguiente restricción, evidentemente no convexa (Garcés, 2020):

$$x^T H r = 1$$

Allí, H es una matriz cuadrada. Ahora, definimos una nueva variable $X = x x^T$. última es una matriz cuadrada y simétrica.

Lema. *La matriz $X = x x^T$ es semidefinida positiva y de rango 1.*

Demostración: El rango de la matriz se observa fácilmente en la definición misma. Ahora, para demostrar que es semidefinida positiva, consideremos un vector arbitrario u y una forma cuadrática $u^T X u$.

De este modo, tendríamos que $u^T X u = u^T x x^T u = (x^T u)^T (x^T u) \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^n$. Usando esta matriz, podemos redefinir la restricción como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} x^T H r = \text{tr}(HX) &= 1 \\ X &\succcurlyeq 0 \\ \text{rango}(X) &= 1 \end{aligned}$$

En este punto, la ecuación anterior sigue siendo no convexa. Sin embargo, relajando la restricción $\text{rango}(X) = 1$, obtenemos un conjunto convexo. Aquí, podemos observar que la complejidad de un problema de optimización no siempre es proporcional al número de variables pues, en este ejemplo, hemos pasado de un problema no convexo en \mathbb{R}^n a un problema convexo en $\mathbb{R}^{n \times n}$. La geometría del problema resulta ser más importante que el número de variables.

Una vez solucionado este problema, podemos proyectar la matriz X sobre el espacio original en busca de la matriz de rango 1 que más se acerque a X . Esto se traduce en el siguiente problema de optimización:

$$\min_x \|xx^T - X\|_F^2$$

Aquí, $\|\cdot\|_F$ es la norma de Frobenius, dada por

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{t=1}^n \lambda_t}$$

Gracias a lo anterior, podemos encontrar el mínimo de $\min_x \|xx^T - X\|_F^2$ derivando e igualando a cero. Veamos (Garcés, 2020):

$$2(xx^T - X)(2x) = 0$$

Luego, definimos $\alpha = xx^T$ para la ecuación anterior tome la siguiente forma:

$$\alpha x - Xx = 0$$

Claramente, α es un eigenvalor asociado a la matriz X , mientras que x es el

correspondiente eigenvector. El valor de x lo podemos calcular de la siguiente forma: calculamos los eigenvalores (λ) y eigenvectores (ϕ) de X ; luego, tomamos $\alpha = \text{máx}(\lambda)$. Posteriormente, calculamos el valor de x como en la ecuación siguiente.

$$x = \sqrt{\alpha} \left(\frac{\phi}{\|\phi\|} \right)$$

Esta, evidentemente, cumple con la condición de ser un eigenvector tal que $xx^T = \alpha$. Note que $\sqrt{\alpha}$ existe dado que la matriz X es semi definida positiva.

El elevado esfuerzo computacional, asociado a las restricciones semi definidas, puede hacer impráctica la metodología en problemas de gran tamaño. En estos casos, es posible generar una aproximación adicional reemplazando las restricciones SDP $X \succeq 0$ por una serie de restricciones de la forma

$$(x_{km})^2 \leq x_{kk}x_{mm}$$

Estas restricciones son SOC-representables, como se mostró en la ecuación $\left\| \begin{matrix} 2w \\ x - y \end{matrix} \right\| \leq x + y$. Esta aproximación puede, en algunos casos, generar soluciones de buena calidad

con un reducido esfuerzo computacional. Otra posible aproximación consiste en hacer la matrix X diagonalmente dominante. Sin embargo, cabe recordar que una matriz es diagonalmente dominante si los términos de la diagonal son mayores o iguales a los términos fuera de la diagonal.

$$x_{kk} \geq \sum_{m \neq k} |x_{km}|$$

Toda matriz diagonalmente dominante es SDP, que puede ser fácilmente demostrado usando el teorema de Gershgorin. De esta forma, hemos reemplazado la restricción SDP por una serie de restricciones lineales.

En problemas binarios consideremos un problema de optimización cuadrática con restricciones binarias que toman valores de -1 o 1, como se muestra a continuación (Garcés, 2020):

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T Q x \\ \text{s.t.} \quad & x \in \{1, -1\} \end{aligned}$$

En el anterior modelo, Q es una matriz no necesariamente convexa. Ahora, convertimos el problema en un modelo SDP equivalente, usando el mismo argumento presentado en la sección anterior.

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(QX) \\ \text{s.t.} \quad & \text{diag}(X) = e \\ & X \succeq 0 \\ & \text{rango}(X) = 1 \end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos un problema convexo cuando relajamos la restricción de rango 1. La solución a este problema es una aproximación inferior al problema combinatorial, pero puede constituir un punto de partida para una metodología heurística. Una forma simple de encontrar una solución binaria es tomar el signo del eigenvector, asociado al eigenvalor más grande del sistema.

De otro lado, los problemas binarios $\{0,1\}$ también pueden ser relajados, generando modelos de optimización semi definida; para ello, creamos una nueva variable $y_i = (x_i + 1)/2$; dado que x_i toma valores ± 1 ; entonces, y_i tomará valores $\{0,1\}$. De este modo, las restricciones del problema relajado serán (Garcés, 2020)

$$\begin{aligned} \text{diag}(X) &= \text{diag}((2y - e)(2y - e)^T) = e \\ X &= xx^T = (2y - e)(2y - e)^T \succeq 0 \end{aligned}$$

Luego, definimos una nueva matriz $Y = yy^T \succeq 0$ y desarrollamos la primera ecuación

$$\begin{aligned} \text{diag}((2y - e)(2y - e)^T) &= e \\ \text{diag}(4yy^T - 2ye^T - 2ey^T + ee^T) &= e \\ 4\text{diag}(Y) - 4\text{diag}(ye^T) &= 0 \\ \text{diag}(Y) &= y \end{aligned}$$

Ahora, extendemos la desigualdad matricial, así:

$$\begin{aligned} (2y - e)(2y - e)^T &\succeq 0 \\ 4yy^T - 2ye^T - 2ey^T + ee^T &\succeq 0 \\ 4Y - 2\text{diag}(Y)e^T - 2e * \text{diag}(Y)^T + ee^T &\succeq 0 \end{aligned}$$

Como se puede notar,

$$\begin{aligned} (e - 2\text{diag}(Y))(e - 2\text{diag}(Y))^T \\ = ee^T - e * 2\text{diag}(Y)^T - 2\text{diag}(Y)e^T \\ + 4\text{diag}(Y)\text{diag}(Y)^T \geq 0 \end{aligned}$$

Si se reemplaza en la ecuación anterior obtenemos lo siguiente,

$$4Y + (e - \text{diag}(Y))(e - 2\text{diag}(Y))^T - 4\text{diag}(Y)\text{diag}(Y)^T \succeq 0$$

Dado que $(e - \text{diag}(Y))(e - 2\text{diag}(Y))^T \succeq 0$, establecer una restricción más fuerte haciendo la siguiente consideración:

$$Y - \text{diag}(Y)\text{diag}(Y)^T \succeq 0$$

Con lo anterior, el problema binario relajado 0/1 considera las siguientes restricciones:

$$\begin{pmatrix} I & \text{diag}(Y)^T \\ \text{diag}(Y) & Y \end{pmatrix} \succcurlyeq 0$$

Este problema se puede resolver fácilmente con cualquier paquete de programación semi definida.

Finalmente, los métodos de programación lineal entera, tales como branch and bound, y los cortes de Gomory pueden ser extendidos al caso de problemas convexos, especialmente, en problemas cónicos. Un caso particular es el de optimización cónica de segundo orden el cual presenta un bajo costo computacional, comparable al de los problemas lineales, pero, al mismo tiempo, mantiene la no linealidad del problema.

El estudio detallado de los problemas enteros-mixtos va más allá de los objetivos de este libro, el lector interesado, puede revisar (Garcés, 2020).

En la optimización polinomial usando linealización, analizaremos los problemas que tengan la siguiente estructura:

$$\min \rho(x) \text{ con } x \in \mathcal{K}$$

En estos problemas, $p \in \mathbb{R}[x]$ (polinomio multivariado) y \mathcal{K} es un conjunto semi algebraico de la siguiente forma:

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n: g_i(x) = 0, h_i(x) \geq 0, g_i, h_i \in \mathbb{R}[x]\}$$

Este problema es, desde luego, no convexo a menos que p, g y h sean polinomios SOS. No obstante, podemos generar problemas convexos aproximados mediante la técnica de reformulación-linealización o RLT

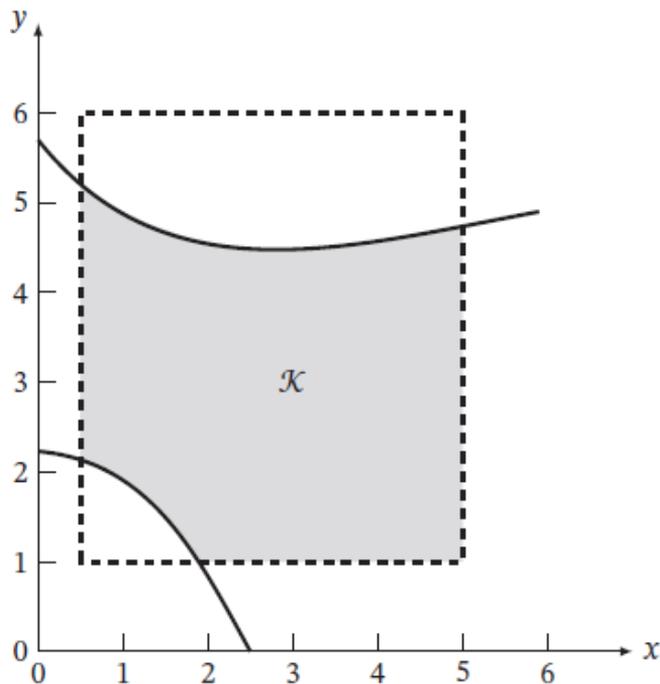
(reformulation-linearization technique [22]). Consideremos un problema de optimización polinomial con restricciones adicionales tipo caja ($l_i \leq x_i \leq u_i$) en donde $l_i > 0$ y u_i es finito. La idea básica es generar una nueva restricción de la forma

$$\prod (x_i - l_i) (u_i - x_i) \geq 0$$

Posteriormente, se debe generar un problema lineal y crear nuevas variables $z = \prod(x)$ veamos la metodología a través de un ejemplo.

Ejemplo 1: Considere el siguiente problema de optimización polinomial cuyo espacio de soluciones se muestra en la figura siguiente (Garcés, 2020):

Figura 3.9. Optimización polinomial



Fuente: Garcés, 2020

$$\begin{array}{ll}
 \min & x^2 + y^2 \quad \square \quad \square \\
 \square & x^2 - 3xy + 8x - 2y^2 + 16y - 26 \quad \geq \quad 0 \\
 \square & \left(\frac{1}{2}\right) \leq x \leq 5 \quad \square \quad \square \\
 \square & 1 \leq y \leq 6 \quad \square \quad \square
 \end{array}$$

Dado lo anterior, evidenciamos una nueva restricción tal y como en $\prod(x_i - l_i)(u_i - x_i) \geq 0$ (Garcés, 2020):

$$\begin{array}{ll}
 & (x - 1/2)(5 - x)(y - 1)(6 - y) \quad \geq \quad 0 \\
 x^2y^2 - 7x^2y + 6x^2 - (11/7)xy^2 + (77/2)xy - 33x + (5/2)y^2 - (35/2)y + 15 & \geq \quad 0
 \end{array}$$

Luego, debemos definir un nuevo conjunto de variables a partir de los monomios generados por la ecuación anterior de la siguiente forma:

$z_1 = x, z_2 = y, z_3 = xy, z_4 = x^2y, z_5 = xy^2, z_6 = x^2y^2, z_7 = x^2y$
 $z_8 = y^2$; de estas obtenemos el siguiente problema lineal, a saber:

$$\begin{array}{ll}
 \min z_7 + z_8 & \square \quad \square \\
 \square & z_6 - 7z_4 + 6z_7 - \left(\frac{11}{2}\right)z_5 + \left(\frac{77}{2}\right)z_3 - 33z_1 + \left(\frac{5}{2}\right)z_8 - \left(\frac{35}{2}\right)z_2 + 15 \quad \geq \quad 0 \\
 \square & z_7 - 3z_3 + 8z_1 - 2z_8 + 16z_2 - 26 \quad \geq \quad 0
 \end{array}$$

En este punto, el problema es ilimitado así que incluimos restricciones adicionales del tipo $z_{min} \leq z_i \leq z_{max}$, que se obtienen a partir de los límites inferiores y superiores de x y y ; incluyendo estas restricciones, tendremos un valor óptimo de 1.25 con $x = 0.50$ y $y = 1.0$. Esto corresponde a una aproximación al problema original.

En la aproximación SOS a problemas polinomiales, podemos obtener una mejor aproximación al problema $\min p(x)$ con $x \in \mathcal{K}$ usando la técnica de suma de polinomios cuadráticos. Consideremos el caso en

que \mathcal{K} contenga únicamente restricciones de desigualdad, definiendo el siguiente problema SOS:

$$\begin{array}{ll} \text{máx } \lambda & \\ \text{□ □} & \\ \text{□} & p(x) - \lambda = u_0(x) + \sum_{k=1}^n h_k(x)q_k(x) \\ \text{□} & u_i(x) \in \text{SOS}, \quad \forall i \in \{0, \dots, n\} \end{array}$$

Este modelo puede ser solucionado usando un equivalente semidefinido, como se presentó en el capítulo ocho. En caso de no encontrar una solución, podemos aumentar el orden de los polinomios u_i y repetir el proceso. Esto ofrecerá una jerarquía de problemas SOS que se acerca cada vez más a la solución del problema original.

Desde luego, el tamaño del modelo equivalente de optimización semidefinida puede crecer significativamente tal y como ocurre en la mayoría de problemas SOS. Esta es la principal limitante de la metodología. Veamos el uso de la técnica a través de un ejemplo.

Las relajaciones SOS son mucho más precisas que las linealizaciones; aunque, el esfuerzo computacional, asociado a las restricciones semidefinidas, puede ser elevado. Un punto intermedio consiste en reemplazar las restricciones semidefinidas por restricciones SOC, tal y como se presentó en la ecuación $(x_{km})^2 \leq x_{kk}x_{mm}$.

3.4. Jerarquía de Lasserre

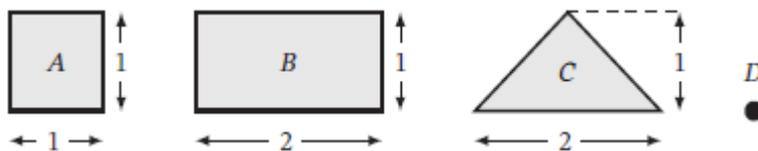
La jerarquía de Lasserre es un método dual a las relajaciones SOS en donde se optimiza sobre un espacio de medida. Por tanto, antes de analizar el método, debemos entender el concepto de medida y cómo

puede ser usado en problemas de optimización matemática. En muchos casos, deseamos medir el tamaño de un conjunto; para ello, usamos conceptos como longitud, área o volumen de acuerdo al espacio en que estemos trabajando. Consideremos el caso que se muestra en la siguiente figura en donde deseamos medir el área de cada conjunto.

La función área toma entonces un conjunto y regresa un escalar positivo con las siguientes características (Garcés, 2020):

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{K}) &\geq 0 \\ \mu(\emptyset) &= 0 \\ \mu(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) &= \mu(\mathcal{K}_1) + \mu(\mathcal{K}_2) \text{ si } \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \emptyset \end{aligned}$$

El valor de μ es siempre positivo siendo 0 solo cuando el conjunto es vacío, como es el caso del conjunto D en la siguiente figura. Igualmente, el área equivalente de la intersección de dos conjuntos disyuntos es simplemente la suma de las áreas correspondientes. Estas tres características se mantienen en los conceptos de longitud y volumen. Con esta idea, podemos generalizar el concepto a cualquier tipo de medida sobre un conjunto. Desde luego, pueden existir múltiples medidas posibles sobre un conjunto; por ejemplo, el perímetro de cada conjunto puede ser una medida y , por tanto, en la siguiente figura tendríamos $\mu(A) = 4, \mu(B) = 6, \mu(C) = 2 + 2\sqrt{5}$ y $\mu(D) = 0$. Igualmente, pueden existir conjuntos que no admiten una función de medida.



El concepto de medida fue fundamental para el entendimiento de los problemas asociados a la teoría de la probabilidad pues, una distribución de probabilidad puede ser interpretada como una medida μ con la propiedad adicional de que $\mu(\mathcal{K}) = 1$; es decir, la medida de todo el espacio es igual a uno.

En la optimización sobre un espacio de medida existe una formulación dual, asociada a la aproximación SOS del problema $\min p(x)$ con $x \in \mathcal{K}$ definiendo el equivalente:

$$\tilde{p} = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})} \left\{ \int_{\mathcal{K}} p d\mu : \mathcal{M}(\mathcal{K}) = 1 \right\}$$

$\mathcal{M}(\mathcal{K})$ es el espacio de todas las posibles medidas μ sobre el conjunto factible \mathcal{K} . Para comprobar que ambos problemas son equivalentes, partimos del hecho de que $p(x) \geq \tilde{p}, \forall x \in \mathcal{K}$ pues \tilde{p} es el óptimo global del problema y, por tanto:

$$\int_{\mathcal{K}} p d\mu \geq \int_{\mathcal{K}} \tilde{p} d\mu$$

como \tilde{p} es un escalar constante, entonces

$$\int_{\mathcal{K}} p d\mu \geq \tilde{p} \int_{\mathcal{K}} d\mu = \tilde{p}$$

La última igualdad se debe a que $\mathcal{M}(\mathcal{K}) = 1$, así que si tomamos el ínfimo respecto a μ , tenemos lo siguiente (Garcés, 2020):

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})} \left\{ \int_{\mathcal{K}} p d\mu \right\} \geq \tilde{p}$$

De esta forma, la ecuación anterior define una aproximación superior al problema de optimización polinomial. Como se puede notar el problema $\tilde{p} = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})} \left\{ \int_{\mathcal{K}} p d\mu : \mathcal{M}(\mathcal{K}) = 1 \right\}$ es dual a la formulación SOS; para demostrarlo, definimos la siguiente función lagrangeana:

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}} \left\{ \int_{\mathcal{K}} p d\mu \right\} \geq \tilde{p}$$

De esta forma, la ecuación anterior define una aproximación superior al problema de optimización polinomial. Como se puede notar el problema $\tilde{p} = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})} \left\{ \int_{\mathcal{K}} p d\mu : \mathcal{M}(\mathcal{K}) = 1 \right\}$ es dual a la formulación SOS; para demostrarlo, definimos la siguiente función lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{K}} p d\mu - \lambda \left(\int_{\mathcal{K}} d\mu - 1 \right)$$

Dado lo anterior, obtenemos la función dual $\mathcal{W} = \lambda$ con $p - \lambda = 0$; por tanto, podemos definir el siguiente problema dual,

$$\sup_{x, \lambda} \left\{ \lambda : p(x) - \lambda = 0; x \in \mathcal{K} \right\}$$

Luego, regresamos al problema $\tilde{p} = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})} \left\{ \int_{\mathcal{K}} p d\mu : \mathcal{M}(\mathcal{K}) = 1 \right\}$, en donde $p(x)$ es un polinomio multivariado. Ahora, introducimos una nueva notación para facilitar el análisis:

Definición. *Dado un polinomio multivariado $p(x)$, definimos un multi exponente α como una secuencia ordenada de números no-negativos tal que*

$$p(x) = \sum m_{\alpha} x^{\alpha}$$

En general, el método de jerarquías de Lasserre es poderoso y permite encontrar soluciones óptimas a casi cualquier problema en sistemas eléctricos, teniendo en cuenta que la mayor parte de problemas pueden ser reescritos como uno de optimización polinomial. La principal dificultad de esta metodología está asociada, nuevamente, al esfuerzo computacional para resolver los problemas SDP, pues el tamaño de las matrices semi definidas crece a medida que nos acercamos a la solución óptima del problema original (Garcés, 2020).

CAPÍTULO IV

OPTIMIZACIÓN GLOBAL Y ALGORITMOS EVOLUTIVOS

4.1. Óptimos locales y globales

La optimización global consiste en encontrar los mejores conjuntos de parámetros que optimizan una función objetivo dada. Los métodos que hemos visto hasta ahora son de naturaleza local (la mayoría diseñados a partir de sistemas de optimalidad). Si embargo, sólo se pueden dar condiciones de optimalidad global bajo ciertas restricciones (función objetivo convexa y región factible también convexa). Esto hace muy difícil resolver exactamente los problemas de optimización global.

La formulación matemática del problema de optimización global es (Martínez Á. , 2023):

$$\begin{aligned} \min f(x) & \quad \square \\ \text{s. a:} & \quad \square \\ g_i(x) = 0, & \quad i = 1, \dots, m_1 \\ h_j(x) \leq 0, & \quad j = m_1 + 1, \dots, m \end{aligned}$$

4.1.1. Tipos de problemas de optimización global

Algunos tipos de problemas de optimización global son:

- Problemas combinatorios: tienen una función objetivo lineal o no lineal definida sobre un conjunto admisible discreto pero muy grande (problemas de redes, planificación, transporte, ...). Si la función es lineal a trozos el problema puede resolverse

exactamente con un método para programación entera mixta, que use *branch and bound*. Los métodos heurísticos (*simulated annealing, tabu search, algoritmos genéticos, ...*) pueden usarse para obtener soluciones aproximadas.

- Problemas generales sin restricciones: Con una función no lineal definida sobre valores reales. Esta función será, en general no convexa. Se han propuesto dos clases genéricas de métodos de resolución: los métodos deterministas y los métodos estocásticos. Los métodos deterministas agrupan los métodos que no conllevan ningún aspecto aleatorio ni estocástico: *branch and bound*, métodos de planos de corte, análisis por intervalos, homotopía, métodos lipschitzianos y métodos de descomposición. Los métodos estocásticos agrupan los métodos que conllevan una búsqueda aleatoria: métodos con dos fases (inicializaciones múltiples, *clustering, ...*), metaheurísticas (genéticos, recocido simulado, ...) y métodos basados sobre superficies de respuesta (*krikgeage, redes neuronales...*).

Algunos tipos de problemas de optimización global son (Martínez Á. , 2023):

- Problemas generales con restricciones: En los métodos deterministas, el tratamiento de las restricciones es similar al de los métodos equivalentes locales (por ejemplo, SQP). Dentro de los algoritmos estocásticos los métodos que permiten el tratamiento de las restricciones pueden clasificarse en:
 - ✓ Funciones de penalización.
 - ✓ Algoritmos de reparación.

- ✓ Operadores y sistemas de representación especiales.
- ✓ Separación de la función objetivo y las restricciones.
- ✓ Métodos híbridos.

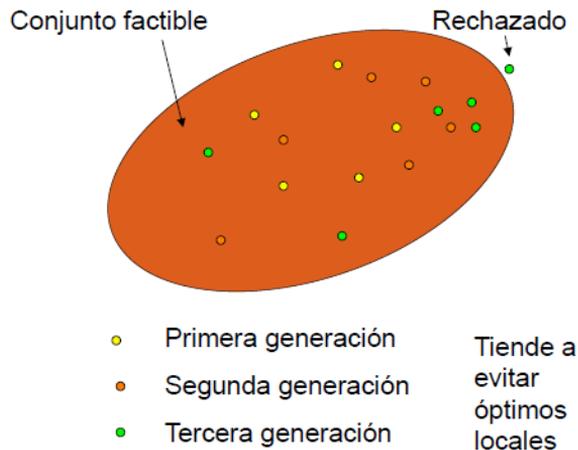
4.1.2. Características de los algoritmos evolutivos

Algunos algoritmos evolutivos presentan las siguientes características:

- Están orientados a trabajar con poblaciones de posibles soluciones, de las que van seleccionándose los mejores individuos (soluciones) en etapas sucesivas.
- En cada generación, la población conserva los mejores y genera nuevos individuos en áreas alejadas para evitar en lo posible los mínimos locales (en este sentido pueden considerarse métodos globales).
- La selección y generación de individuos se hace por distintos métodos, principalmente estocásticos.
- Diversas familias: GA, TS, SA,...
- Suelen estar basados en evaluaciones de la función y no en sus derivadas, lo que facilita su uso en problemas no derivables o con derivadas difíciles de calcular.
- Las restricciones son más difíciles de tratar y normalmente deben implementarse como funciones de penalización.
- Suelen ser más lentos que los métodos deterministas.
- No adecuados para gran número de variables.
- Se generan candidatos x_i aleatoriamente y se evalúa $J(x_i)$.
- Se usa una regla de selección. Se generan nuevos candidatos de forma que siempre haya algunos alejados de los mejores.

- Se continúa hasta que se cumpla la condición de terminación.

Figura 4.1. Optimización global



Autor: Martínez Á. , 2023

El Simulated annealing (recocido simulado) tiene como características (Martínez Á. , 2023):

- Un modo de evitar que la búsqueda local finalice en óptimos locales es permitir que algunos movimientos sean hacia soluciones peores.
- Se controla la frecuencia de los movimientos de escape de un óptimo mediante una función de probabilidad que disminuirá la posibilidad de esos movimientos hacia soluciones peores conforme avance la búsqueda.
- Este es un método de búsqueda por entornos caracterizado por un criterio de aceptación de soluciones vecinas que se adapta a lo largo de la ejecución.

- Hace uso de una variable llamada Temperatura T , cuyo valor determina en qué medida pueden ser aceptadas soluciones vecinas peores que la actual.
- La variable T se inicializa en un valor alto llamado Temperatura inicial T_0 y se va reduciendo en cada iteración.
- En cada iteración se genera un número concreto de vecinos, $L(T)$.
- Cada vez que se genera un vecino se aplica el criterio de aceptación para ver si sustituye la solución actual.
- Si la solución vecina es mejor que la actual, se acepta.
- Si la solución vecina es peor, aún existe la probabilidad de aceptarla (esto permite la salida de óptimos locales).
- Esta probabilidad depende de la diferencia de costes entre la solución actual y la vecina δ y de la temperatura T , Probabilidad de aceptación: $\exp(-\delta/T)$.
- A mayor temperatura existe mayor posibilidad de aceptación de soluciones peores y de esta manera el algoritmo acepta soluciones mucho peores al principio de la ejecución (exploración) que al final.
- A menor diferencia de costes existe mayor posibilidad de aceptación.
- Una vez se generan $L(T)$ soluciones vecinas, se reduce T (enfriamiento) y se repite el proceso.
- Se detiene el algoritmo cuando se ha reducido suficientemente T , o bien si se supera un número máximo de iteraciones.
- Hay muchas decisiones que tomar: ¿Cómo reducir la temperatura? ¿Cuándo es ésta suficientemente pequeña?

¿Cuántas iteraciones realizar antes del decrecimiento de la temperatura? ...

- No hay un conjunto de reglas para responder a esto, pero sí una serie de consejos basados en la experiencia.
- En general su eficacia depende mucho del conocimiento del problema que se quiere resolver.

Análogamente, un algoritmo genético (GA) busca los extremos de una función definida sobre un espacio de datos. Para utilizarlo debe disponerse de los cinco elementos siguientes (Martínez Á. , 2023):

- *Un principio de codificación de cada elemento de la población.* Esta etapa asocia a cada uno de los puntos del espacio de datos una estructura de datos. La calidad de la codificación de los datos condiciona el éxito de los algoritmos genéticos. Las codificaciones binarias fueron muy utilizadas originalmente. Sin embargo, ahora son más utilizadas las codificaciones reales.
- *Un mecanismo de generación de la población inicial.* Este mecanismo tiene que ser capaz de producir una población de individuos no homogénea que servirá de base para las generaciones futuras. La elección de la población inicial es importante pues puede hacer más o menos rápida la convergencia hacia el óptimo global. En el caso en el que no conozca nada sobre el problema a resolver es esencial que la población inicial se reparta sobre todo el dominio de búsqueda.
- *Una función a optimizar que devuelva un valor real positivo (es la función de evaluación del individuo).*

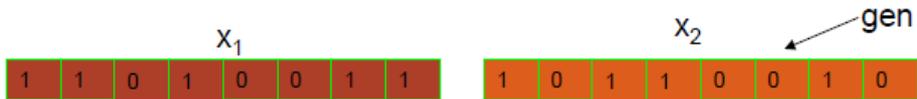
- *Operadores que permitan diversificar la población* a lo largo de las generaciones y explorar el espacio de estados. El operador de cruce recompone los genes de individuos existentes en la población, el operador de mutación permite garantizar la exploración del espacio de estados.
- *Parámetros de dimensionamiento*: tamaño de la población, número total de generaciones o criterio de parada, probabilidades de aplicación de los operadores de cruce y mutación.

Las características del principio general de funcionamiento son (Martínez Á. , 2023):

- Se genera una población inicial de individuos de forma aleatoria.
- Para pasar de una generación k a la generación $k + 1$, las tres operaciones siguientes se repiten para todos los elementos de la población k :
 - ✓ Las parejas de padres P_1 y P_2 se seleccionan en función de sus adaptaciones. El operador de cruce se les aplica con una probabilidad P_c (generalmente alrededor de 0.6) y se generan pares de hijos C_1 y C_2 .
 - ✓ Otros elementos P son seleccionados en función de su adaptación. El operador de mutación se aplica con probabilidad P_m (mucho menor que P_x) y genera individuos mutados P' .
 - ✓ El nivel de adaptación de los hijos (C_1, C_2) y de los individuos mutados se evalúan antes de incluirlos en la nueva población.

Un ejemplo simple son los individuos que se codifican como número binarios:

Figura 4.2. Codificación



Autor: Martínez Á., 2023

A cada individuo se le asigna un valor relacionado con la función de coste (y de penalización en el caso con restricciones).

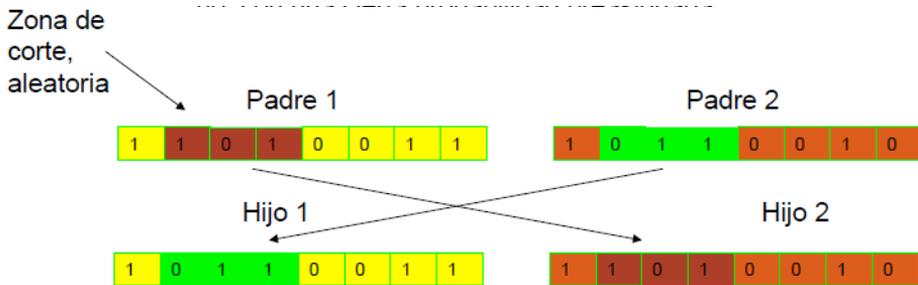
Según (Martínez Á. , 2023), en la selección los individuos que se pueden conservar para la siguiente generación se seleccionan con probabilidades que dependen de su función de costo.

$$P(X_i) = \left(\frac{J(X_i)}{\sum_{i=1}^N J(X_i)} \right)$$

Normalmente siempre se conserva; además, el mejor de una generación para la siguiente

Según (Martínez Á. , 2023), el cruce con los individuos seleccionados, se generan nuevos individuos cruzando genéticamente individuos de la población (en puntos aleatorios). Dos individuos se cruzan ó no, con una cierta probabilidad preasignada.

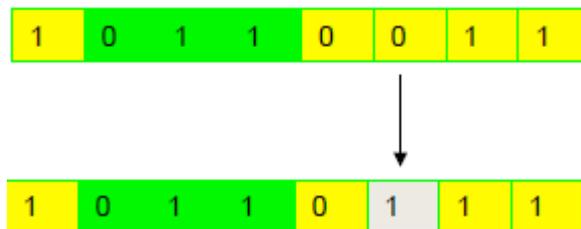
Figura 4.3. Probabilidad preasignada



Autor: Martínez Á., 2023

La mutación de cada gen de un se cambia aleatoriamente de 0 a 1 ó viceversa con una cierta probabilidad (mucho más pequeña que la de cruce).

Figura 4.4. Mutación aleatoria



Autor: Martínez Á., 2023

Los criterios de parada indican (Martínez Á. , 2023):

- El número de generaciones que se desea ejecutar puede fijarse a priori.
- El algoritmo puede pararse cuando la población no evoluciona más o no evoluciona lo suficientemente rápido.
- Los métodos híbridos indican:

- Estrategias que combinan diferentes métodos de optimización, normalmente técnicas deterministas y estocásticas.
- La hibridación de algoritmos es una tarea delicada en donde la elección de los métodos a combinar y el modo de estructurar dicha combinación es fundamental.
- Una primera clasificación de estos métodos puede hacerse según el tipo de hibridación:
 - ✓ Secuencial: dos algoritmos son aplicados uno después de otro, utilizando en cada uno de ellos el resultado del anterior como punto inicial.
 - ✓ Paralela: O bien, se utiliza un algoritmo como operador de otro, o bien varios algoritmos buscan el óptimo intercambiando información.

La hibridación secuencial indica lo siguiente (Martínez Á. , 2023):

- La mayoría de los métodos estocásticos de optimización presentan una velocidad de convergencia relativamente lenta, especialmente en la última etapa de su búsqueda. Sin embargo, los métodos locales deterministas convergen muy rápido si se parte de un buen punto inicial. En consecuencia, los métodos que combinan de forma secuencial un algoritmo estocástico en la primera fase y un algoritmo local de tipo gradiente en la segunda han demostrado ser muy eficientes.
- La dificultad principal de la hibridación secuencial se encuentra en decidir cuándo detener un algoritmo e iniciar el siguiente. Una inicialización temprana puede hacer que, si el segundo algoritmo es local, la convergencia sea hacia una solución local. Por el

contrario, una inicialización tras la estabilización del primer método puede reducir la eficiencia.

Por su parte, la hibridación paralela sincrónica indica (Martínez Á. , 2023):

- La primera idea que podemos tener es usar algún método de búsqueda local (basado en gradiente, SA, búsqueda tabú ...) como un operador de un algoritmo evolutivo. En este caso, en lugar de usar un operador ciego actuando sin cuidado en el conjunto de individuos originales, usamos un operador que es un algoritmo de búsqueda que considera los individuos como origen de su búsqueda, la aplica y finalmente reemplaza los individuos originales por los mejorados.

Según (Martínez Á. , 2023), un ejemplo de Scatter Search es:

- El algoritmo comienza generando un conjunto inicial de soluciones diversas del que se extrae un subconjunto pequeño que se denomina *conjunto de referencia*.
- Se combinan los elementos del *conjunto de referencia* y se utiliza un método de búsqueda local para mejorar las soluciones del conjunto de referencia y de las combinadas.
- Se actualiza el conjunto de referencia teniendo en cuenta criterios de calidad y diversidad.
- Se generan subconjuntos del conjunto de *referencia* a los que se aplicará el método de combinación.
- Se comprueba si se satisface el criterio de parada. Si es así se acaba y si no, se regenera el *conjunto de referencia*.

También, la hibridación paralela asincrónica (PAH) indica:

- Este tipo de esquemas combina varios algoritmos desarrollando una búsqueda en el espacio de soluciones (o en un subespacio), y cooperando para encontrar un óptimo. Se distinguen dos tipos de PAH:
 - ✓ *Homogénea*: todos los algoritmos son el mismo.
 - ✓ *Heterogénea*: se usan algoritmos distintos.
- Desde otro punto de vista, se pueden distinguir tres tipos de cooperación:
 - ✓ *Global*: todos los algoritmos buscan en el mismo espacio de soluciones.
 - ✓ *Parcial*: el problema se descompone en subproblemas teniendo cada uno su propio espacio de soluciones.
 - ✓ *Funcional*: los algoritmos resuelven diferentes problemas.

4.2. Condiciones Kuhn-Tucker

Para la toma de decisiones el administrador debe tomar en cuenta su metodología y forma sistemática, los pasos que proponen los matemáticos para la solución de problemas son (Bustos, 2023):

- *Diagnóstico del problema*. Se detecta la desviación entre lo que se había planeado y lo realizado, no puede confundir el síntoma con la causa, pues este síntoma se manifiesta y no es necesariamente la causa.
- *Investigación y obtención de información*. Los subordinados pueden considerarse como memorias porque ellos son los afectados por la decisión la participación de este aumenta la

participación y lo motiva para la acción sin información del área de riego aumenta.

- *Desarrollo de alternativas.* La solución de los problemas puede lograrse por varios caminos y no solo seleccionar entre dos alternativas, se pueden formular hipótesis pues con la alternativa hay incertidumbre.
- *Experimentación.* El administrador debe acercarse al ideal científico y poner a prueba sus decisiones, sobre todo cuando involucra un cambio profundo en la operación.
- *Análisis de restricciones.* La toma de decisiones está restringida por variables como los objetivos de la organización, las políticas, la oportunidad, tiempo, recursos económicos, tecnología y en las experiencias anteriores, así como factores sociológicos y culturales, como las restricciones troncan la toma de decisiones y no es fácil actuar acertadamente se necesita que el administrador tenga una mente abierta y creativa.
- *Evaluación de alternativas.* Para adecuada evaluación de alternativas se debe formular las preguntas: ¿cómo construye esta alternativa al cumplimiento del objetivo, en que forma afecta la alternativa a otras operaciones, cuan flexible es, que resistencia el cambio puede tener, se cuenta con los recursos económicos, ¿cuál es el costo económico, ¿cuál es el costo-beneficio?
- *Toma de decisiones.* Lo importante es tomar decisiones oportunas, pues un ejecutivo que no toma decisiones por miedo o indecisión está destinado al fracaso olvidando que no hacer nada es tomar una decisión: la peor.

- *Formulación del plan.* Según el problema se debe elaborar el plan que corresponda.
- *Ejecución y control.* Se debe garantizar que el plan se lleve a tiempo aplicando controles adecuados.

La optimización puede considerarse como la búsqueda de la mejor solución (óptima) de un problema. El término mejor aquí depende del contexto en que se trabaje, podría significar solución que minimiza los costos, o maximiza los beneficios o que hace que la distancia recorrida sea mínima, etcétera. Esta primera reflexión sobre lo que se entiende por optimización refleja claramente las importantísima e indudables aplicaciones de esta área de las matemáticas; aplicaciones que surgen en la práctica de las ciencias (Bustos, 2023).

El abordar un problema real de optimización supone básicamente dos etapas:

- Determinar el modelo matemático que rige el problema.
- Resolver dicho problema usando una serie de técnicas matemáticas.

Lógicamente se buscan modelos sencillos que puedan resolverse con las herramientas analíticas y de cálculo disponibles. El precio pagado por la simplicidad puede ser la falta de fiabilidad de las conclusiones del modelo; por esa razón resulta recomendable su comparación con observaciones empíricas.

Los que problemas pueden ser resueltos mediante la optimización matemática pueden expresarse en la forma (Bustos, 2023):

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \\ x \in \mathcal{D} \end{array} \right. f(x) \quad \text{o} \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \\ x \in D \end{array} \right. f(x)$$

Sabemos:

- x es un vector de n componentes reales conocido como vector de variables de decisión.
- $f(x)$ es una función de n variables que se conoce como función objetivo.
- El conjunto D se conoce como región factible o conjunto de soluciones factibles.
- Los problemas de optimización también se conocen como programas matemáticos.

El objetivo de la optimización matemática es, por tanto, encontrar máximos y mínimos de funciones de varias variables sujetas a una serie de restricciones. Llegar a plantear un problema de optimización supone (Bustos, 2023):

- Elegir las variables de decisión. Un excesivo número de variables puede aumentar la complejidad del problema; por lo que, se puede prescindir de los factores con efectos mínimos sobre el modelo.
- Determinar la función objetivo. En algunas funciones pueden adaptarse al modelo, de la elección realizada puede depender la efectividad del sistema.

- Determinar las limitaciones o restricciones que han de imponerse a las variables para de esta forma obtener el espacio de soluciones factibles. Debe tenerse presente:
 - ✓ Omitir restricciones puede hacer que la solución del problema cambie totalmente.
 - ✓ Evitar imponer restricciones contradictorias, que hacen que el problema no tenga solución.
 - ✓ Controlar las restricciones redundantes, pues no afectan a la solución, pero pueden aumentar la complejidad del cálculo.
 - ✓ Debe usarse unidades de medida consistentes. Un error que suele ser común es usar diferentes unidades de medida en distintas restricciones.

Sinónimos de la optimización son las expresiones economizar, distribución de recursos, limitación de recursos, toma de las mejores decisiones, etcétera. Desde un punto de vista práctico, los problemas con restricciones de desigualdad pueden ajustarse mejor a situaciones reales.

Puede pensarse que una restricción de igualdad significa agotar completamente cierto recurso; en cambio, la misma restricción en forma de desigualdad resulta más realista, pues indica la disponibilidad del recurso, pero no obliga a agotarlo completamente.

4.2.1. Método de Kuhn-Tucker

El estudio de este tipo de problemas ha sido más reciente que el de los problemas sin restricciones o con restricciones de igualdad. DE hecho, el más importante de los resultados expuestos aquí, el conocido como

teorema de Kuhn-Tucker, publicado en 1951. La forma estándar de los problemas con restricciones de desigualdad es (Bustos, 2023):

$$\begin{array}{lll} \min f(x) & \square & \square \\ g_1(x) & \leq & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ g_m(x) & \leq & 0 \end{array}$$

Las desigualdades estrictas pueden conducir a problemas sin solución; por esa razón son excluidas de la formulación de estos problemas. Esta exclusión que en principio parece una limitación importante, no lo es tanto desde un punto de vista práctico pues difícilmente se encuentran desigualdades estrictas en casos reales.

Por otra parte, se supone siempre que las desigualdades tienen el signo \leq y el término de la derecha es nulo, fácilmente se puede conseguir expresar las restricciones en esta forma si fuese necesario.

Enseguida, se presentan las condiciones necesarias de optimización que constituyen la generalización de las dadas por Lagrange para problemas con restricciones de desigualdad. Para poder aplicarlas, es necesario en primer lugar que todas las funciones que intervienen en el problema admitan derivadas parciales de primer orden continuas.

Teorema: *Dado un problema de la forma*

$$\begin{array}{lll} \min f(x) & \square & \square \\ g_1(x) & \leq & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ g_m(x) & \leq & 0 \end{array}$$

que tiene un mínimo local en el punto y^* . Si los vectores gradientes de las restricciones saturadas en y^* entonces cada restricción saturada tiene asociado un número positivo $\lambda_i \geq 0$ (conocido como multiplicador de Kuhn-Tucker) de la forma (Bustos, 2023):

$$\begin{aligned} & \text{Grad } f(y) + \lambda_1 * \text{Grad } g_1(y) + \dots + \lambda_m * \text{Grad } g_m(y) = 0 \end{aligned}$$

Para que en la expresión anterior intervengan todas las restricciones se asocian multiplicadores nulos a las restricciones no saturadas, para ello se imponen las condiciones:

$$\lambda_i * g_i(y) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

Algunas observaciones sobre este resultado que conviene destacar son (Bustos, 2023):

- Para poder aplicar el resultado es importante que el problema esté planteado en la forma que aparece en el teorema; de no ser así, los signos de los multiplicadores podrían ser diferentes.
- Debe también verificarse la hipótesis de regularidad que obliga a que los vectores gradientes de las restricciones saturadas sean linealmente independientes en el óptimo. De no ser así el punto podría no verificar el teorema, como ocurriría en el caso de restricciones de igualdad.
- Los multiplicadores de Kuhn-Tucker también se conocen como variables duales del problema.

- Para problemas de maximización se tendrá un resultado similar, con la única diferencia que los multiplicadores deben ser negativos.
- El teorema sirve, igual que el teorema de Lagrange, para determinar los posibles óptimos de un problema; para ello, habría que resolver un sistema de $n + m$ ecuaciones con $n + m$ incógnitas. Una vez resuelto este sistema habría que seleccionar aquellas soluciones que verifican las desigualdades. Para analogía con los problemas con restricciones de igualdad, a estos puntos se les llama puntos estacionarios.

Con las condiciones estudiadas hasta ahora, no se está en disposición de asegurar que dicho punto corresponda realmente a un mínimo local del problema. Se hace necesario, por tanto, el estudio de condiciones suficientes de optimización (Bustos, 2023).

Una vez seleccionadas las posibles soluciones de un problema de optimización con restricciones de desigualdad, deben estudiarse condiciones suficientes que permitan decidir si realmente los puntos localizados corresponden a verdaderas soluciones.

Teorema. *Si el problema es convexo; entonces, las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker son además suficientes.*

Las condiciones suficientes de segundo orden, aplicables a todos los problemas cuyas funciones sean derivables parcialmente hasta orden 2 y con derivadas, son las mismas que en los problemas con restricciones de igualdad considerando solamente las restricciones que en el posible óptimo tienen asociados multiplicadores no nulos (Bustos, 2023).

La optimización con restricciones de desigualdad del Método de Kuhn-Tucker indica que D denota un conjunto abierto de \mathbb{R}^n tal que en el tema problemas de optimización con restricciones de desigualdad

$$\max f(x) \quad \text{s. a: } x \in S$$

donde $S = \{x \in D: g_1(x) \leq b_1, \dots, g_m(x) \leq b_m\}$ y donde $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g = (g_1, \dots, g_m): D \rightarrow \mathbb{R}^m$. En contraste con los problemas de Lagrange, no existe limitación del número finito de restricciones. Una restricción del tipo $g_i(x) \geq b_i$ es equivalente a $-g_i(x) \leq -b_i$. El problema

$$\min f(x) \quad \text{s. t: } x \in S,$$

tiene las mismas soluciones que

$$\max -f(x) \quad \text{s. a: } x \in S$$

Definición (condiciones necesarias de Khun-Tucker). *Dado un punto $x_0 \in D$, decimos que la restricción i -ésima del problema $\max f(x) \quad \text{s. a: } x \in S$, $i = 1, \dots, m$, está saturada en el punto x_0 , si $g_i(x_0) = b_i$. Si $g_i(p) < b_i$; entonces, decimos que la restricción i -ésima no está saturada en el punto x_0 (o que x_0 no saturada la restricción).*

Definición. *Sea g de clase C^1 en D . El punto $x_0 \in D$ es regular si x_0 no satura ninguna restricción, o bien los vectores gradiente de las restricciones saturadas en x_0 forman una matriz de rango máximo (es decir, en el caso de que $k \leq m$ sea el número de restricciones saturadas en el punto x_0 ; entonces ma matriz mencionada tiene rango k).*

Definición. La función Lagrangiana asociada a $\max f(x)$ s.a: $x \in S$ es

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda * (b - f(x))$$

donde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

Teorema (Método de Kuhn-Tucker). Suponemos que las funciones $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g = (g_1, \dots, g_m): D \rightarrow \mathbb{R}^m$ son de clase C^1 en D y que x_0 es un punto regular de $\max f(x)$ s.a: $x \in S$. Si x_0 es una solución del problema $\max f(x)$ s.a: $x \in S$; entonces un vector de multiplicadores $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0) \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\begin{array}{l} \forall i \in (1, \dots, n) \\ \forall i \in (1, \dots, m) \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (x_i)} \right) (x_0, \lambda_0) = 0 \\ \lambda_1^0 (b_i - g_i(x_0)) = 0 \\ \lambda_1^0 \geq 0 \\ g_i(x_0) \leq b_i \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} = 0 \\ \\ \\ \end{array}$$

Las ecuaciones

- 1) $\nabla_x L(x, \lambda) = 0,$
- 2) $\lambda_1(b_1 - g_1(x)) = 0, \dots, \lambda_m(b_m - g_m(x)) = 0$
- 3) $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0,$
- 4) $g_1(x) \leq b_1, \dots, g_m \leq b_m$

Se llaman ecuaciones de Kuhn-Tucker del problema $\max f(x)$ s.a: $x \in S$. Una forma de aplicar las condiciones necesarias del **Teorema (Método de Kuhn-Tucker)** es solucionar el sistema de $n + m$ ecuaciones y $n + m$ incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(x_1)} \right) (x, \lambda) = 0 \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(x_n)} \right) (x, \lambda) = 0 \\ \lambda_1^0 (b_1 - g_1(x_0)) = 0 \\ \vdots \\ \lambda_m^0 (b_m - g_m(x_0)) = 0 \end{array} \right.$$

De las ecuaciones (x, λ) encontradas, sólo se retienen aquéllas que satisfacen el resto de las condiciones necesarias: $x \in S$ y $\lambda_i \geq 0$.

Las ecuaciones Kuhn-Tucker de la proposición sólo son válidas cuando el problema está escrito en la forma $\max f(x)$ s.a: $x \in S$. Si, por ejemplo, se pide resolver un problema de minimización o las desigualdades son \geq en lugar de \leq ; entonces, el problema se puede transformar de forma trivial para convertirlo en uno que venga descrito en la forma $\max f(x)$ s.a: $x \in S$.

Por ejemplo, si nos piden minimizar $f(x)$, esto es equivalente a maximizar $-f(x)$; o bien, si la restricción i -ésima es $g_i(x) \leq a_i$, eso equivale a la restricción $a_i - g_i(x) \geq 0$.

Si S es compacto, el Teorema de Weierstrass asegura la existencia de soluciones globales de $\max f(x)$ s.a: $x \in S$. Asumiendo que la hipótesis de regularidad se cumple, estas soluciones globales serán puntos críticos de f relativos a S .

Estas soluciones globales se determinan evaluando los puntos críticos en la función objetivo f . Los valores extremos son los máximos y mínimos de f en S .

Sean $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g = (g_1, \dots, g_m): D \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^1 en D .

Teorema. *Si en el problema $\max f(x)$ s.a: $x \in S$, la función objetivo f es cóncava y las restricciones g_1, \dots, g_m son convexas (recordar que las restricciones son de la forma $g_i(x) \leq b_i$, las condiciones necesarias de Khun-Tucker establecidas en el Teorema son también suficientes y si $x_0 \in S$ las verifica; entonces, x_0 es un máximo global de f en S .*

Si además de las hipótesis anteriores, f es estrictamente cóncava; entonces, el máximo global, de existir, es único. Por tanto, una vez que una solución (x_0, λ_0) de las condiciones de KT ha sido hallada, podemos parar la búsqueda, puesto que no habrá más soluciones.

Las restricciones de no negatividad indican que muy a menudo los problemas con restricciones incluyen la no negatividad de las variables. A pesar de que este caso es un caso particular de la teoría desarrollada anteriormente, en muchos libros de texto se describen las condiciones de Khun-Tucker para este caso que, a primera vista, pueden parecer diferentes a las ya descritas.

En realidad, las condiciones son equivalentes, y tienen la siguiente estructura. Sea el problema de optimización con restricciones de no negatividad siguiente:

$$\max f(x) \quad \text{s.a: } x \in S$$

donde $S = \{x \in D: g_1(x) \leq b_1, \dots, g_m(x) \leq b_m, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ y $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g = (g_1, \dots, g_m): D \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definición. *La función Lagrangiana asociada a la definición anterior es*

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda * (b - g(x))$$

donde $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Observar que es este caso la Lagrangiana no incorpora las restricciones de no negatividad. Simplemente asigna multiplicadores al resto de restricciones $g_i(x) \leq b_i$.

Teorema (Método de Kuhn-Tucker para problemas con restricciones de no negatividad). *Supongamos que las funciones $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g = (g_1, \dots, g_m): D \rightarrow \mathbb{R}^m$ son de clase C , para ello basta que la matriz cuyas columnas son los vectores gradiente $\nabla g_1(x_0)^t, \dots, \nabla g_m(x_0)^t$ tenga rango m no es necesario considerar las restricciones de no negatividad, en D y que x_0 es un punto regular.*

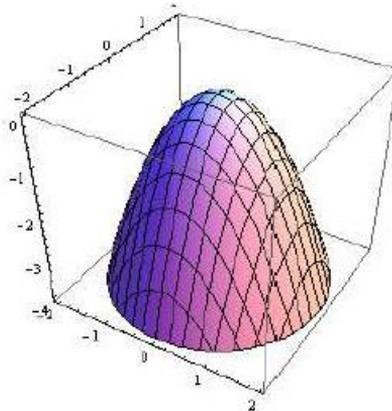
Si x_0 es una solución del problema $\max f(x)$ s. a: $x \in S$; entonces, existe un vector $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0) \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\begin{aligned} \forall i \in (1, \dots, n) \quad \square & \quad \begin{cases} x_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \right) (x_0, \lambda_0) = 0, \\ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \right) (x_0, \lambda_0) \leq 0, \end{cases} \\ \forall i \in (1, \dots, m) \quad \square & \quad \begin{cases} \lambda_i^0 (b_i - g_i(x_0)) = 0, \\ \lambda_i^0 \geq 0, \\ g_i(x_0) \leq b_i \end{cases} \end{aligned}$$

Sea C un subconjunto un conjunto no vacío convexo de \mathbb{R}^n . Consideramos de manera independiente los problemas de optimización siguientes:

- 1) La función objetivo $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncava en C y el problema consiste en:

Figura 4.5. Problema de optimización

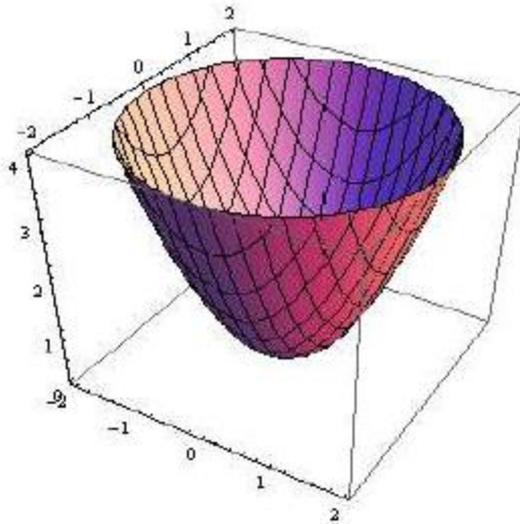


$$\max_{x \in C} f(x)$$

Autor: Bustos, 2023

- 2) La función objetivo $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa en C y el problema consiste en:

Figura 4.6. Función objetivo



$$\min_{x \in C} f(x)$$

Autor: Bustos, 2023

Proposición. Sea C un subconjunto no vacío convexo \mathbb{R}^n . Sea $f: C \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) Si f es cóncava y x_0 es un máximo local de f en C ; entonces, x_0 es un máximo global de f en C .
- 2) Si f es convexa y $x_0 \in C$ es un mínimo local de f en C ; entonces, x_0 es aún mínimo global de f en C .

Proposición. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, abierto y convexo, $x_0 \in C$ y sea f de clase C , para ello basta que la matriz cuyas columnas son los vectores gradiente $\nabla g_1(x_0)^t, \dots, \nabla g_m(x_0)^t$ tenga rango m no es necesario considerar las restricciones de no negatividad, en D y que x_0 es un punto regular, en C .

- 1) Si f es cóncava; entonces, x_0 es un máximo global de f en C si y sólo si $\nabla f(x_0) = 0$.
- 2) Si f es convexa; entonces, x_0 es un mínimo global de f en C si y sólo si $\nabla f(x_0) = 0$.

Demostración. Si, por ejemplo, f es cóncava; entonces para cada $x \in D$ tenemos que

$$f(x) \leq f(p) + \nabla f(p)(x - p) = f(p)$$

ya que $\nabla f(p) = 0$. Si una función es estrictamente cóncava (resp. convexa); entonces, se verifica que

$$f(x) < f(p) + \nabla f(p)(x - p) = f(p)$$

y vemos que si tiene un máximo (resp. mínimo); entonces, éste es único. También se puede demostrar directamente a partir de la definición, sin necesidad de utilizar las condiciones de primer orden.

Proposición. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y convexo sea $f: C \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces

- 1) El conjunto formado por los mínimos globales de una función convexa, es convexo.
- 2) El conjunto formado por los máximos globales de una función cóncava, es convexo.

Demostración. Probaremos sólo la primera afirmación, pues la segunda es inmediata considerando $-f$, que es una función cóncava si f es convexa.

Sea M el conjunto de minimizadores de f . Si $M = \emptyset$; entonces, el resultado es trivial. Sean $x_1, x_2 \in M$ y sea $\lambda \in [0,1]$. Tenemos $m = f(x_i) \leq f(x)$, para todo $x \in M$, para $i = 1,2$. Dado que f es convexa, $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = m$; por lo que, $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ es un mínimo global de f , luego $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in M$ y M es convexo.

Teorema. Sean $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío y convexo, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ y sea x_0 un punto interior de C . Entonces

- 1) Si f es convexa y x_0 es un máximo global de f en C ; entonces, f es constante.
- 2) Si f es cóncava y x_0 es un mínimo global de f en C ; entonces, f es constante.

Definición. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Un punto $x_0 \in C$ es un vértice de C si $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ para $x_1, x_2 \in C$, implica $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.

Es decir, un punto del conjunto es un vértice, si no puede expresarse como combinación convexa no trivial de otros dos puntos del conjunto. Note que los vértices son siempre puntos frontera que pertenecen al conjunto (pero no todo punto frontera es un vértice).

Por ejemplo, consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y < 1\}, \\ C_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y \leq 1\}, \\ C_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}, \\ C_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}, \end{aligned}$$

Todos son conjuntos convexos. Ni C_1 ni C_2 tienen vértices. C_3 tiene tres vértices, los puntos $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$. C_4 tiene un número infinito de vértices (la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$).

Teorema. *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, convexo y compacto, sea $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces, C tiene vértices y además:*

- 1) *Si f es convexa; entonces, f alcanza máximo global en alguno de los vértices de C .*
- 2) *Si f es cóncava; entonces, f alcanza mínimo global en alguno de los vértices de C .*

4.2.2. Relajaciones

La técnica de relajación se puede describir de manera sencilla para la minimización de una función sobre un dominio finito (Szigeti, Cardillo, Hennes, & Calvet, 2014): $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathfrak{R}$.

A cada función sobre el dominio $Z_n = \{1, 2, \dots, n\}$, se puede asociar otra función sobre el conjunto de medidas probabilísticas

$$\hat{p} = \left\{ P = (p(i)): 0 \leq p(i), i = 1, 2, \dots, n; \sum_{i=1}^n p(i) = 1 \right\},$$

de la siguiente manera: $i \rightarrow f(i) \Leftrightarrow P \rightarrow E_p(f) = \sum_{i=1}^n p(i)f(i)$. Además, \hat{p} , el dominio de la esperanza matemática, es una extensión natural del dominio Z_n . En efecto, a cada $i \in Z_n$ se puede asociar la medida probabilística definida por:

$$p_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0); \text{ es decir, } p_i(j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

Es fácil ver que el mínimo global del problema no lineal $\min_{i \in Z_n} f(i)$ el mínimo de la función lineal coincide en $i_0 \leftrightarrow P_{i_0}$. A la extensión de una función no lineal a una función lineal utilizando la técnica presentada se le denomina el método de relajación. Para sistemas de control clásico, ya en los años 60 J. Warga y otros utilizaron la técnica de relajación.

Curiosamente en los últimos años ha resurgido el uso de la técnica, pero en otro contexto. Así, en vez del uso de la optimización combinatoria se propone resolver los problemas relajados, con el fin de disminuir la complejidad computacional. En [JW62], [JW162] se analiza la equivalencia entre el problema original y el problema relajado (Szigeti, Cardillo, Hennem, & Calvet, 2014).

En este trabajo, planteamos el problema de relajación en el contexto de la optimización de una clase de procesos a eventos discretos (sistemas a eventos discretos) equipados con funciones de costo cóncavas y convexas.

El primero, genéricamente, siempre garantiza que la equivalencia entre el problema original y el problema relajado es dada esencialmente con una condición de principio de mínimo. Mientras que el segundo, es consecuencia del teorema de separación para conjuntos convexos; garantizando la equivalencia entre el problema original y el relajado por una condición de principio de mínimo.

El problema de optimización de procesos a eventos discretos (Sistema a Eventos Discretos) considera el siguiente problema de optimización

$$x(k + 1) = A(u(k))xk + b(u(k)), x(0) = 0$$

donde $A: \{-1,1\}^m \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times n}$, $b: \{-1,1\}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$, son funciones de dominio finito, definido sobre el conjunto $\{-1,1\}^m$ de los vértices del hipercubo de dimensión m . A la secuencia $u(0), u(1), \dots, u(K - 1)$ se le denomina controles (decisiones).

La trayectoria asociada al control es la secuencia $x(0), x(1), \dots, x(K)$, calculada por $x(k + 1) = A(u(k))xk + b(u(k)), x(0) = 0$. La función de costo es definida por $\Phi: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, como $J(x, u) = \Phi(x(k))$.

Ahora, el objetivo es hallar una secuencia $u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(K - 1)$, al que, para la trayectoria correspondiente $x^*(0), x^*(1), \dots, x^*(K)$, se cumpla:

$$J(x^*, u^*) = \Phi(x^*(K)) \leq \Phi(x(K)) = J(x, u)$$

para todo $u(0), u(1), \dots, x(K - 1)$.

El principio de mínimo es una condición necesaria para el control óptimo $u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(K - 1)$. Para anunciarlo necesitamos el concepto de trayectoria variada $x_{i,u}(0), x_{i,u}(1), \dots, x_{i,u}(K - 1)$ y la trayectoria dual

$$\varphi_{i,u}(i + 1), x_{i,u}(i + 2), \dots, x_{i,u}(K):$$

$$\begin{aligned}
 x_{i,u}(k) &= x^*(k), k \leq i, && \square \\
 x_{i,u}(i+1) &= A(u)x^*(i) + b(u), && \square \\
 x_{i,u}(k+1) &= A(u^*(k))x_{i,u}(k) + b(u^*(k)), && k > i \text{ y} \\
 \varphi_{i,u}(k) &= A(u^*(k))^T \varphi_{i,u}(k+1), && \varphi_{i,u}(k) = \Re\Phi(x^*(k); x_{i,u}(K)), \quad k > i,
 \end{aligned}$$

donde

$$\Re\Phi(x^*(K); x(K)) = \int_0^1 \text{grad}\Phi\left(x^*(K) + t(x_{i,u}(K) - x^*(K))\right) dt$$

Entonces el criterio de optimalidad es la desigualdad (Szigeti, Cardillo, Henet, & Calvet, 2014):

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_{i,u}(i+1), (A(u^*(k))x(k) + b(u^*(i))) \rangle \\
 \leq \langle \varphi_{i,u}(i+1), A(u)x^*(i) + b(u) \rangle,
 \end{aligned}$$

para todo i y u .

Aquí la relajación se define en la dinámica para i , y medida de probabilidad $P = (p(u)), u \in \{-1,1\}^m$; de la siguiente manera. La trayectoria $x_{i,p}(0), x_{i,p}(1), \dots, x_{i,p}(K)$, se define por:

$$\begin{aligned}
 x_{i,p}(k) &= u^*(k), k \leq i, && \square \\
 x_{i,p}(i+1) &= \sum_u p(u)(A(u)x^*(k) + b(u)), && \square \\
 x_{i,p}(k+1) &= A(u^*(k))x_{i,p}(k) + b(u^*(k)) && k > i
 \end{aligned}$$

El problema de relajación consiste en poder obtener una condición tal que:

$$\Phi(u^*(K)) = \min_{u(k) \in \{-1,1\}^m} \Phi(x(K))_{\forall k=0,1,\dots,K} = \min_{P \in \hat{P}} \Phi(x_{i,p}(K))_{\forall i}$$

□

se cumpla.

Empecemos esta sección dando algunas observaciones y lemas necesarios para los principales resultados que obtuvimos. Observemos, que si $P = P_v$; es decir

$$P_v(u) = \begin{cases} 1, & u = v \\ 0, & u \neq v \end{cases}$$

entonces $x_{i,p}(k) = x_i(k)$. La trayectoria dual correspondiente, en este caso, se define como (Szigeti, Cardillo, Hennes, & Calvet, 2014):

$$\varphi_{i,p}(k) = A(u^*(k))^T \varphi_{i,p}(k+1), \varphi_{i,p}(K) = \Re \Phi(x^*(K); x(K))$$

Lema. Si $0 \leq \sum c_i x(i)$, con $\sum x(i) = 1, x(i) \geq 0$; entonces, $0 \leq c_i$.

Prueba. Por el absurdo, supongamos que $c_i \leq 0$; entonces, dado que

$$x_0(i) = \begin{cases} 1 & i = i_0, \\ 0 & i \neq i_0, \end{cases}$$

entonces $0 \leq \sum c_i x_0(i) = c_{i_0} < 0$, es una contradicción.

Lema: Si $x_{i,p}(k)$ es la trayectoria del i -ésimo problema relajado por $P = (p(u))$ y $x_{i,u}(k)$ es la solución del problema perturbado en el paso i por u ; entonces

$$x_{i,p}(k) = \sum p(u) x_{i,u}(k), \quad k = 1, 2, \dots, K$$

Prueba. Por definición

$$x_{i,u}(i + 1) = A(u)x^*(i) + b(u),$$

y

$$x_{i,p}(i + 1) = \sum p(u)(A(u)x^*(i) + b(u)) = \sum p(u) x_{i,u}(i + 1)$$

entonces $x_{i,p}(k) = \sum p(u) x_{i,u}(k)$, $k = 1, 2, \dots, K$ es válido para $i + 1$.
 1. Suponiendo por inducción matemática que $x_{i,p}(k) = \sum p(u) x_{i,u}(k)$, $k = 1, 2, \dots, K$ es válido para k , entonces para $k + 1$ (Szigeti, Cardillo, Hennet, & Calvet, 2014).

$$\begin{aligned} x_{i,p}(i + 1) &= A(u^*(k))X_p(k) + b(u^*(k)) &= \\ \square &= A(u^*(k))\left(\sum_u p(u) X_{i,v}(k)\right) + b(u^*(k)) &= \\ \square &= \sum_u p(u) (A(u^*(k))X_{i,v}(k) + b(u^*(k))) &= \sum_u p(u) X_{i,v}(k + 1) \end{aligned}$$

Teorema. Si Φ es cóncava; es decir, si para todo $\lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1$, con $x, y \in \mathfrak{R}^n$, se cumple que

$$\lambda\Phi(x) + \mu\Phi(y) \leq \Phi(\lambda x + \lambda y),$$

entonces el problema relajado y el problema original tienen el mismo mínimo. Es decir, si $u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(K - 1)$, es el control óptimo; entonces, para cada i fijo, el i -ésimo problema relajado

$$\min_{P \in \hat{P}} \Phi \left(X_{i,P}(K) \right)$$

tiene el mínimo en $P_{u^*(i)}$, definido por

$$P_{u^*(i)}(u) = \begin{cases} 1 & u = u^*(i) \\ 0 & u \neq u^*(i) \end{cases}$$

Prueba

Primero demostraremos la igualdad

$$\begin{aligned} \Phi(X_{i,P}(K)) - \Phi(x^*(k)) &= \sum_u p(u) \langle \varphi_{i,P}(i+1), (A(u)x^*(i) + b(u)) - (A(u^*(i))x^*(i) + b(u^*(i))) \rangle \\ \Phi(X_{i,P}(K)) - \Phi(x^*(k)) &\equiv \mathbf{R}\Phi(x^*(K); x_{i,P}(K) (x_{i,P}(K) - x^*(k))) = \langle \varphi_{i,P}(K), x_{i,P}(K) - x^*(K) \rangle \\ \square &\equiv \langle \varphi_{i,P}(K), A(u^*(K-1))x_{i,P}(K-1) + b(u^*(K-1)) - A(u^*(K-1))x^*(K-1) + b(u^*(K-1)) \rangle x^*(K-1) = \\ \square &\equiv \langle A(u^*(K-1))^T \varphi_{i,P}(k+1), x_{i,P}(K-1) - x^*(K-1) \rangle = \langle \varphi_{i,P}(K-1), x_{i,P}(K-1) - x^*(K-1) \rangle = \dots = \\ \square &\equiv \langle \varphi_{i,P}(k+1), x_{i,P}(i+1) - x^*(i+1) \rangle = \\ \square &= \langle \varphi_{i,P}(k+1), \sum_u p(u) (A(u)x^*(i) + b(u)) - (A(u^*(i))x^*(i) + b(u^*(i))) \rangle = \\ \square &= \sum_u p(u) \langle \varphi_{i,P}(k+1), (A(u)x^*(i) + b(u)) - (A(u^*(i))x^*(i) + b(u^*(i))) \rangle \end{aligned}$$

Ahora supongamos que el i -ésimo problema relajado tiene óptimo en $P_{u^*(i)}$. Entonces

$$0 \leq \Phi \left(X_{i,P}(K) \right) - \Phi(x^*(K)),$$

y por la fórmula demostrada anteriormente

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_u p(u) \langle \varphi_{i,P}(i+1), (A(u)x^*(i) + b(u)) \\ - (A(u^*(i))x^*(i) + b(u^*(i))) \rangle \end{aligned}$$

para todo P , así como también para $P = P_v$ y $\varphi_{P_v,i}(i+1) = \varphi_{i,v}(i+1)$

Por el **Lema**. Si $0 \leq \sum c_i x(i)$, con $\sum x(i) = 1, x(i) \geq 0$; entonces, $0 \leq c_i$, se tiene

$$\begin{aligned} & \langle \varphi_{i,v}(i+1), A(u^*(i))x^*(i) + b(u^*(i)) \rangle \\ & \leq \langle \varphi_{i,v}(i+1), A(u)x^*(i) + b(u) \rangle \end{aligned}$$

siendo esta última ecuación el principio de mínimo, sin necesidad de usar la concavidad o convexidad de Φ . Ahora, supongamos que el principio de mínimo se cumple (Szigeti, Cardillo, Hennes, & Calvet, 2014).

Para una medida de probabilidad $P = (p(u))$, multipliquemos la desigualdad anterior por $p(u)$ y sumemos para todo $v \in \{-1, 1\}^m$.

Entonces

$$\begin{aligned} 0 & \leq \sum_v P(v) \langle \varphi_{i,v}(i+1), (A(u)x^*(i) + b(u)) - (A(u^*(i))x^*(i) + b(u^*(i))) \rangle & = \\ & = \sum_v P(v) \langle \varphi_{i,v}(i+1), X_{i,v}(i+1) - x^*(i+1) \rangle & = \dots = \\ & = \sum_v P(v) \langle \varphi_{i,v}(K), X_{i,v}(K) - x^*(K) \rangle = \sum_v P(v) \left(\Phi(X_{i,v}(K)) - \Phi(x^*(K)) \right) & \leq \\ & \leq \Phi\left(\sum_v P(v) X_{i,v}(K)\right) - \sum_v P(v) \Phi(x^*(K)) = & \Phi(X_{i,P}(K)) - \Phi(x^*(K)) \end{aligned}$$

por lo que el mínimo del problema relajado es alcanzado en $P_{u^*(i)}$. Quedando demostrada la equivalencia entre el problema original y el relajado (Szigeti, Cardillo, Hennes, & Calvet, 2014).

Los conceptos básicos de la relajación Lagrangiana y dualidad consideran el problema (P) (Pérez, 2017):

$$\begin{array}{ll}
 \square & \text{Minimizar } f(x) \quad \square \quad \square \\
 (P) & \text{s. a: } \square \quad g_i(x) \leq 0 \quad \square \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \square \quad \square \quad h_j(x) = 0 \quad \square \quad j = 1, 2, \dots, p \\
 & \square \quad \square \quad \square \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \quad \square \quad \square
 \end{array}$$

Donde X es un conjunto no vacío y f es una función real. Además, diremos que (P) es el *problema primal*. Sean las funciones $g(x) := [g_1(x), \dots, g_m(x)]^T$, $h(x) := [h_1(x), \dots, h_p(x)]^T$ y consideremos el conjunto $F := \{x \in X \mid g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$. F es la región factible del problema primal (P) y cualquier punto de la misma se denomina solución factible.

Las restricciones del problema primal (P) pueden ser de varios tipos:

- El grupo de restricciones $g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$ se denominan restricciones explícitas de desigualdad, mientras que el grupo de restricciones $h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p$ se denominan *restricciones explícitas de igualdad*.
- $x \in X$ se denominan *restricciones implícitas*.

En la formulación del problema primal, se ha separado el conjunto de restricciones en explícitas e implícitas, para enfatizar que las restricciones *difíciles* son las explícitas y que el problema primal sería más fácil de resolver sin las mismas. Esta partición del conjunto de restricciones es lo que justifica la siguiente (Pérez, 2017)

Definición. *Dado el problema primal (P) .*

- *Se define el Lagrangiano como la función*

$$L(x, \mu, \lambda) := f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(x)$$

donde $\mu_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$. Además, $\mu := [\mu_1, \dots, \mu_m], \lambda := [\lambda_1, \dots, \lambda_p]$ se denominan variables duales o multiplicadores de Lagrange.

- Se define la función Lagrangiana como $\Phi(\mu, \lambda) := \underbrace{\inf}_{x \in X} L(x, \mu, \lambda)$

Definición (Condiciones globales de optimalidad). Se dice que $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$, con $\bar{x} \in X, \bar{\mu} \in \mathbb{R}_+^m$ y $\bar{\lambda} \in \mathbb{P}^p$, satisfacen las condiciones globales de optimalidad para el problema primal (P) se cumplen las siguientes condiciones:

1. $f(\bar{x}) + \bar{\mu}g(\bar{x}) + \bar{\lambda}h(\bar{x}) = \underbrace{\inf}_{x \in X} \{f(x) + \bar{\mu}g(x) + \bar{\lambda}h(x)\}$
2. $\bar{\mu}g(\bar{x}) = 0$
3. $g(\bar{x}) \leq 0$ y $g(\bar{x}) = 0$

A continuación, enunciamos unas condiciones suficientes de optimalidad para el problema primal (P). Nótese que no son condiciones necesarias, se pueden establecer condiciones necesarias, asumiendo convexidad y algunas condiciones de regularidad, si $x \in \mathbb{R}^n$ y se asumen hipótesis de cierta diferenciabilidad se obtienen las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Teorema. Si $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$ satisfacen las condiciones globales de optimalidad; entonces, \bar{x} es óptimo para el problema primal.

Teorema (problema dualidad Lagrangiano débil). Para cada $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^p$ se tiene $\phi(\mu, \lambda) \leq p^*$, donde $p^* = \inf_{x \in F} f(x)$.

El problema dual del problema primal (P), es el problema (D) siguiente

$$\begin{array}{lll} \square & \text{Maximizar} & \phi(\mu, \lambda) \\ (D) & \mu, \lambda & \square \\ \square & \text{s. a:} & \mu \geq 0 \end{array}$$

Sea $d^* := \sup_{\mu \geq 0, \lambda} \phi(\mu, \lambda)$. Llamaremos solución *factible dual* a todo (μ, λ) tal que $\mu \geq 0$ y $\phi(\mu, \lambda) > -\infty$. Además, fijado x , dado que la función $L(x, \mu, \lambda)$ es lineal con respecto a (μ, λ) (luego convexa y cóncava), se deduce que $\phi(\mu, \lambda)$ es cóncava. El problema dual (D) es un problema de maximizar una función objetivo cóncava sobre una región factible convexa. Además, en virtud del teorema de dualidad débil, se tiene que $d^* \leq p^*$. Si $d^* < p^*$, se dice que hay un *salto de dualidad* y la magnitud del mismo es igual a $p^* - d^*$.

Nótese que en este trabajo estudiamos problemas de Programación Entera, donde se tiene que X es finito y donde existe habitualmente (salvo casos muy especiales) salto de dualidad mayor que cero. Además, el hecho de que X sea finito implica que $\phi(\mu, \lambda)$ es una función *cóncava, lineal a trozos y no diferenciable*. A continuación, señalaremos brevemente unas observaciones acerca de la infactibilidad y no acotación del problema primal y su relación con el problema dual (Pérez, 2017):

- Si el problema primal es no acotado; es decir, $p^* = -\infty$, en virtud del teorema de dualidad débil se tiene $\emptyset(\mu, \lambda) = -\infty$; para todo $\mu \in \mathbb{R}_+^m$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}^p$, luego el problema dual es no factible.
- Supongamos que el problema primal es no factible, es decir, el conjunto $F = \emptyset$; Entonces, tomaremos como convenio que $p^* = \infty$.
- La función Lagrangiana $\emptyset(\mu, \lambda)$, satisface que $\emptyset(\mu, \lambda) < \infty, \forall \lambda$, pero es posible que $d^* = \infty$, en cuyo caso el problema dual es no acotado, y en consecuencia, se deduce que es no factible. También puede suceder que $d^* < \infty$, o incluso que $d^* = -\infty$.

Dado un problema primal, se pueden obtener varios problemas duales, dependiendo qué restricciones se seleccionan como restricciones explícitas y cuáles como implícitas. En la práctica, dependiendo de la naturaleza del problema, se debe realizar una adecuada selección del conjunto X .

A continuación, presentamos dos teoremas que proporcionan unas condiciones bajo las cuales el salto de dualidad es cero. Más concretamente (Pérez, 2017):

Teorema. Si $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$ satisfacen las condiciones globales de optimalidad; entonces, $(\bar{\mu}, \bar{\lambda})$ es óptimo para el problema dual. Además, $d^* = p^*$.

Teorema (del punto de silla). $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$ es óptimo si, y sólo si $\bar{x} \in X, \bar{\mu} \in \mathbb{R}_+^m$ y $L(\bar{x}, \mu, \lambda) \leq L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}), \forall x \in X, \mu \in \mathbb{R}_+^m, \lambda \in \mathbb{R}^p$.

Es posible dar un teorema de dualidad fuerte. En la literatura, es frecuente encontrarlo bajo diferentes versiones, dependiendo de las hipótesis, aunque todos suelen tener en común hipótesis de convexidad. En la práctica, y salvo muy raras ocasiones y en modelos muy concretos, no tendremos hipótesis de convexidad y mucho menos salto de dualidad cero. Recordemos, en este trabajo, nos centraremos en problemas de Programación Entera, donde en general, existirá salto de dualidad mayor que cero.

Si el punto de silla del Lagrangiano no existe, un procedimiento para atacar el problema es la convexificación del mismo. Puede probarse, que resolver el problema dual y resolver el problema convexificado son equivalentes.

La dificultad del problema convexificado está en conocer una expresión explícita de la envolvente convexa, si bien, hay algunos casos donde existen métodos que permiten resolver el problema convexificado, como los llamados cortes Fenchel en Programación Entera. Nosotros, en principio, nos centraremos en resolver el problema dual.

En este capítulo y para el problema que tratamos aquí, hemos optado por usar relajación Lagrangiana puesto que métodos heurísticos de tipo *greedy* o procedimientos de búsqueda local (por ende, algunas metaheurísticas basadas en los mismos, tales como GRASP) han resultado aquí ser bastante lentos en la práctica, debido fundamentalmente a la no linealidad del problema en las variables de asignación.

La descomposición espacial del problema es

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{P2}\lambda) \quad & \text{Minimizar} \quad \sum_{j \in J} \left(f_j x_j + \sum_{i \in I} (\hat{d}_{ij} - \lambda_i) y_{ij} + K_j u_j + q_j v_j \right) + \sum_{j \in J} \lambda_j \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \\
 & \text{s.a:} \quad y_{ij} \leq x_j \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in J \quad \square \\
 & \quad \square \quad \square \quad -u_j^2 + \sum_{i \in I} \mu_i y_{ij} \leq 0, \quad \forall j \in J \quad \square \\
 & \quad \square \quad \square \quad -v_j^2 + \sum_{i \in I} \hat{\sigma}_i^2 y_{ij} \leq 0, \quad \forall j \in J \quad \square \\
 & \quad \square \quad x_j \in \{0,1\}, \quad \forall j \in J \quad \square \quad \square \\
 & \quad \square \quad y_j \geq 0, \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J \quad \square \\
 & \quad \square \quad u_j \geq 0, \quad v_j \geq 0, \quad \forall j \in J \quad \square
 \end{aligned}$$

Denotaremos por V al valor óptimo de la correspondiente función objetivo. El problema $(\mathbf{P2}\lambda)$ puede descomponerse en $|J|$ subproblemas, uno para cada punto posible de localización de los CD $j \in J$, que denotaremos por $(\mathbf{P2}_{j^*}\lambda)$. Más concretamente, sea $j^* \in J$ fijo. Se tiene (Pérez, 2017)

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{P2}_{j^*}\lambda) \quad & \text{Minimizar} \quad \sum_{j \in J} \left(f_j x_{j^*} + \sum_{i \in I} (\hat{d}_{ij^*} - \lambda_i) y_{ij^*} + K_{j^*} u_{j^*} + q_{j^*} v_{j^*} \right) + \sum_{j \in J} \lambda_j \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \\
 & \text{s.a:} \quad y_{ij^*} \leq x_{j^*} \quad \forall i \in I, \quad \square \quad \square \\
 & \quad \square \quad \square \quad -u_{j^*}^2 + \sum_{i \in I} \mu_i y_{ij^*} \leq 0, \quad \square \quad \square \\
 & \quad \square \quad \square \quad -v_{j^*}^2 + \sum_{i \in I} \hat{\sigma}_i^2 y_{ij^*} \leq 0, \quad \square \quad \square \\
 & \quad \square \quad x_{j^*} \in \{0,1\}, \quad \square \quad \square \quad \square \\
 & \quad \square \quad y_{j^*} \geq 0, \quad \forall i \in I \quad \square \quad \square \\
 & \quad \square \quad u_{j^*} \geq 0, \quad v_{j^*} \geq 0, \quad \square \quad \square
 \end{aligned}$$

Denotaremos por V_{j^*} al valor óptimo de la correspondiente función objetivo. Para cada $j \in J$, el subproblema $(\mathbf{P2}_{j^*}\lambda)$ tiene sólo una variable binaria, x_j . Además, tiene $|I| + 2$ variables continuas, u_j, v_j e

y_{ij} y $2|I| + 2$ restricciones. Esta descomposición se conoce como *descomposición espacial*, pues se basa en aprovechar la estructura espacial de la red de la cadena de suministro.

Como resultado de esta descomposición, el valor óptimo (global) de la función objetivo de $(P2\lambda)$, que corresponde a una cota inferior del problema $(P2)$, puede calcularse como

$$V = \sum_{j \in J} V_j + \sum_{i \in I} \lambda_i$$

Para cada valor fijo de los multiplicadores λ_i , resolveremos el problema $(P2_j\lambda)$ minimizando para cada $j \in J$. Entonces, en virtud de $V = \sum_{j \in J} V_j + \sum_{i \in I} \lambda_i$, el valor óptimo de la función objetivo puede calcularse para cada valor λ_i . Además, usaremos un método de Optimización Subgradiente para actualizar los multiplicadores λ_i .

Los subproblemas de la relajación Lagrangiana indican que en cada iteración (con valores fijos de los multiplicadores λ_i), las variables x_j se optimizan separadamente en cada subproblema $(P2_j\lambda)$ de acuerdo con el procedimiento de descomposición mencionado anteriormente.

Para cada subproblema $(P2_j\lambda)$, observemos que el valor de la correspondiente función objetivo es 0 si, y sólo si $x_j = 0$ (es decir, si no seleccionamos el punto j como CD). En otras palabras, hay una solución factible que conduce al valor 0.

En consecuencia, el valor óptimo del subproblema $(P2_j\lambda)$ debe ser menor o igual que 0. Debido a esta observación, es posible que bajo

algún λ_i los valores óptimos de la función objetivo para todos los subproblemas $(P2_j\lambda)$ sean 0 (es decir, $x_j = 0, \forall j \in J$, no seleccionando ningún punto $j \in J$ como *CD*). En cualquier caso, la restricción $\sum_{j \in J} y_{ij} = 1, \forall i \in I$ implica (Pérez, 2017)

$$\sum_{j \in J} x_j \geq 1$$

Es decir, esta inecuación quiere decir que al menos un punto $j \in J$ debe ser seleccionado como *CD* para satisfacer la demanda. Sin embargo, una vez que se ha relajado la restricción $\sum_{j \in J} y_{ij} = 1, \forall i \in I$, la restricción $\sum_{j \in J} x_j \geq 1$ no se tiene en el problema, luego esta debe ser tenida en cuenta en el procedimiento de resolución del problema.

Más concretamente, para que se satisfaga la restricción $\sum_{j \in J} x_j \geq 1$ en la relajación Lagrangiana, realizaremos las siguientes modificaciones a la etapa antes mencionada para resolver para cada punto $j \in J$ el problema $(P2_j\lambda)$:

En primer lugar, consideremos para cada $j \in J$, el problema $(P2R_j\lambda)$, que es en realidad un caso particular de $(P2_j\lambda)$ cuando $x_j = 1$. La formulación para un $j^* \in J$ fijo es

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{P2R}_j\lambda) \quad & \text{Minimizar} \quad \left(f_j^* + \sum_{i \in I} (\hat{d}_{ij}^* - \lambda_i) y_{ij}^* + K_j^* u_j^* + q_j v_j^* \right) + \sum_{\forall j \in J} \lambda_i \\
 & \text{s. a:} \quad y_{ij}^* \leq 1 \quad \forall i \in I, \\
 & -u_j^{*2} + \sum_{i \in I} \mu_i y_{ij}^* \leq 0, \\
 & -v_j^{*2} + \sum_{i \in I} \hat{\sigma}_i^2 y_{ij}^* \leq 0, \\
 & y_{ij}^* \geq 0, \quad \forall i \in I \\
 & u_j^* \geq 0, \quad v_j^* \geq 0,
 \end{aligned}$$

Denotaremos por \hat{V}_j^* al valor óptimo de la correspondiente función objetivo. Como la variable x_j no aparece en $(\mathbf{P2R}_j\lambda)$, el valor óptimo de la función objetivo del mismo es igual al valor óptimo de la función objetivo correspondiente al problema $(\mathbf{P2R}_j\lambda)$ cuando $x_j = 1$. Nótese que en general, puede no ser igual al valor óptimo (global) de la función objetivo correspondiente al problema $(\mathbf{P2R}_j\lambda)$, pues este puede ser alcanzado para $x_j = 0$.

Para cada valor λ_i fijo, (Pérez, 2017)

- Si $\hat{V}_j < 0$; entonces, si $x_j = 1$ se tiene $\hat{V}_j = V_j < 0$ y, si $x_j = 0$, se llega a que $\hat{V}_j \geq 0$ lo que es absurdo. En consecuencia, es óptimo que $x_j = 1$.
- Si $\hat{V}_j \geq 0$ se tiene que si $x_j = 0$; entonces, $0 = V_j \leq \hat{V}_j$. Si $x_j = 1$ comprueba trivialmente que se llega a un absurdo.

Un posible caso extremo es cuando $\hat{V}_j \geq 0, \forall j \in J$ (por ejemplo, cuando $\lambda_i = 0, i \in I$). Esto significa que $V_j \geq 0, \forall j \in J$; es decir, $x_j = 0, \forall j \in J$ (i.e. no se selecciona ningún punto como *CD*). Para que se satisfaga la restricción $\sum_{j \in J} x_j \geq 1$ (es decir, que al menos se seleccione un punto como *CD*) instalaremos el *CD* en el punto $j \in J$ que tenga el menor valor de la función objetivo \hat{V}_j .

En consecuencia, el algoritmo para resolver los subproblemas de la relajación Lagrangiana es como sigue. Para cada valor fijo de los multiplicadores λ_i , resolveremos para cada $j \in J$, el problema $(P2R_{j^*} \lambda)$.

Entonces, seleccionaremos aquellos puntos $j \in J$ como posibles puntos de localización de los *CD* (es decir $x_j = 1$) para los que $\hat{V}_j \leq 0$. Para el resto de puntos $j \in J$ para los que $\hat{V}_j > 0$, no serán seleccionados como *CD* y entonces $x_j = 0$. En otro caso, si $\hat{V}_j > 0, \forall j \in J$, seleccionaremos sólo un *CD* con el mínimo $\hat{V}_j > 0, \forall j \in J$; es decir, $x_{j^*} = 1$ para $j^* \in J$ tal que $\hat{V}_{j^*} = \min_{j \in J} \{\hat{V}_j\}$.

Haciendo esto en cada iteración de la relajación Lagrangiana (para cada valor del multiplicador λ_i), aseguramos que la solución óptima siempre satisfaga $\sum_{j \in J} x_j \geq 1$. De este modo, podemos calcular V como (Pérez, 2017)

$$V = \sum_{j \in J, x_j=1} \hat{V}_j + \sum_{i \in I} \lambda_i$$

La relajación Lagrangiana es una metodología bien conocida para resolver problemas de optimización combinatoria de gran tamaño y complejidad. Se basa en explotar la estructura inherente de cada problema con el objetivo de obtener cotas inferiores y cotas superiores sobre el valor óptimo del problema (Guignard (2003)) citado por (Pérez, 2017).

Además, relajaremos $\sum_{j \in N_i} y_{ijk} = 1, i = 1, \dots, m$ con el fin de obtener un problema sencillo de resolver. Nótese que en el procedimiento de relajación Lagrangiana necesitamos: ser capaces de resolver fácilmente los subproblemas, un método para obtener soluciones factibles (una heurística Lagrangiana, ver Avella et al. (2007) o Daskin (2013) para heurísticas Lagrangianas para el problema (PMP)) y un procedimiento para actualizar los multiplicadores (procedimiento de optimización subgradiente, ver Frangioni et. al. (2017)) citados por (Pérez, 2017).

El procedimiento de relajación Lagrangiana que aplicamos aquí es novedoso, y difiere del existente en Choi y Chaudry (1993), pues ellos recaen en un subproblema de tipo mochila y nosotros sólo necesitamos resolver un problema trivial. La razón de esto, es que hemos sido capaces de adaptar el procedimiento de relajación Lagrangiana para el problema de la p –mediana clásica (**PMP**) (Daskin (2013)) al problema (**PMPDC2**).

$$\begin{aligned}
 \square \quad (\text{PMPDC2}\lambda) \quad & \text{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j \in N_i} h_i d_{ij} y_{ij} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left[1 - \sum_{j \in N_i} y_{ij} \right] \quad \square \quad \square \quad \square \\
 & = \sum_{i=1}^m \sum_{j \in N_i} (h_i d_{ij} - \lambda_i) y_{ij} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad \square \quad \square \\
 \text{s. a:} \quad & y_{ij} \leq x_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j \in N_i \quad \square \\
 & \sum_{j=1}^n x_j = p, \quad \square \quad \square \\
 & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \dots, n \\
 & y_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \\
 & \square \quad \square \quad \square \quad \square
 \end{aligned}$$

Para valores fijos de los multiplicadores, λ_i , queremos minimizar la función objetivo $\text{Minimizar} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in N_i} h_i d_{ij} y_{ij} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left[1 - \sum_{j \in N_i} y_{ij} \right] = \sum_{i=1}^m \sum_{j \in N_i} (h_i d_{ij} - \lambda_i) y_{ij} + \sum_{i=1}^m \lambda_i$. Nótese que el término $\sum_{i=1}^m \lambda_i$ es constante.

A continuación, se resume el algoritmo propuesto de relajación Lagrangiana para resolver el problema de la p-mediana con restricciones de distancia máxima (Pérez, 2017).

- *Paso 1 (inicialización)*. Inicializar $UB := +\infty$ (cota superior), $LB := -\infty$ (cota inferior), $k := 0$ y tomar unos valores iniciales para los multiplicadores. Nosotros hemos optado por establecer como LB inicial el valor objetivo de la solución óptima de la relajación lineal del problema y como multiplicadores iniciales las variables duales asociadas a la solución óptima de la relajación lineal.

- *Paso 2 (Resolución de los subproblemas)*. En la iteración k -ésima, fijado λ^k , calcularemos

$$V_j = \sum_{i \in M} \min_{j \in N_i} \{0, h_i d_{ij} - \lambda_i\}, \quad j \in N$$

Encontrar los p menores valores de V_j y poner $x_j(\lambda^k) = 1$ en los correspondientes puntos candidato de servicio y $x_j(\lambda^k) = 0$ en otro caso. Establecer $y_{ij} = 1$ si $x_j(\lambda^k) = 1$ y $h_i d_{ij} - \lambda_i < 0$ en otro caso. Calcular

$$V(\lambda^k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j \in N_i} (h_i d_{ij} - \lambda_i) y_{ij} + \sum_{i \in I} \lambda_i^k$$

Si $V(\lambda^k) > LB$; entonces, $LB := V(\lambda^k)$.

- *Paso 3 (Resolución de los subproblemas)*. Fijados los p valores de las variables $x_j(\lambda^k)$, para cada $i = 1, \dots, m$ encontrar

$$\hat{j}_i = \arg \min \{d_{ij} \mid x_j = 1, \quad j \in N\}$$

Establecer $y_{ij}(\lambda^k) = 1$ si $j = \hat{j}_i$ y $y_{ij}(\lambda^k) = 0$ en otro caso.

Calcular

$$\bar{V}(\lambda^k) = \sum_{i=1}^m h_i d_{i\hat{j}_i}$$

Si $\bar{V}(\lambda^k) < UB$; entonces, $UB := \bar{V}(\lambda^k)$ (Pérez, 2017).

- *Paso 4 (Iteración subgradiente).* Calcular el subgradiente ξ_i usando

$$1 - \sum_{j \in N_i} y_{ij}, \quad i \in M$$

Calcular la longitud de paso

$$T_k := \left(\frac{\theta_{sub}(UB - LB)}{\sum_{i=1}^m (1 - \sum_{j \in N_i} y_{ij})^2} \right)$$

Actualizar los multiplicadores:

$$\lambda^{k+1} := \max\{0, \lambda^k + T_k \xi^k\}$$

Además, si en más de un número prefijado de iteraciones (pasadas) la cota inferior LB no mejora, entonces $\theta_{sub} := \theta_{sub}/2$. En nuestros experimentos numéricos, nosotros hemos optado por establecer 18 pasadas.

- *Paso 5 (Criterio de parada).*

Si el salto de dualidad ($GAP = \frac{(UB-LB)}{UB}$) es menor que una tolerancia prefijada, o si el número de iteraciones máximas se ha alcanzado o si la norma del subgradiente o θ_{sub} son menores que unas tolerancias prefijadas, *PARAR*, y establecer UB como valor objetivo, y $x_j(\lambda^k)$ y $y_{ij}(\lambda^k)$ como la solución final obtenida. Si no, $k := k + 1$ e ir al paso 2 (Pérez, 2017).

BIBLIOGRAFÍA

- Adams, J. A., Benitez, M. D., Guidek, R. C., & Domínguez, G. A. (2016). *Enseñanza de Programación Lineal y Juegos de Empresa*. Asunción, Paraguay: Universidad Autónoma de Paraguay.
- Adhikari, R., & Dandekar, R. (2012). Optimization models for control of parasitic diseases. *Mathematical and Computer Modelling*, 56(1-2), 233-250.
- Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., & Orlin, J. B. (1993). *Network Flows. Theory, Algorithms and Applications*. Upper Saddle River. New Jersey, USA.: Prentice-Hall, Inc.
- Alarcón, S. (1998). La programación estocástica discreta como instrumento de planificación de plantaciones de olivos en Castilla-La Mancha. *Economía Agraria N0. 183*, 173-200.
- Alidaee, A., & Aneja, Y. P. (2018). *Non-predetermined goal programming. In Operations research: A model-based approach*. New Jersey, U.S.A.: Springer, Cham.
- Ancco, P. R., Chalco, C. D., Clavijo, T. P., Delgado, H. P., Huarac, S. Y., & Ugarte, F. D. (2020). Métodos para el procesamiento de imágenes digitales. *Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, Cusco Perú*, 1-8.
- Anderson, D. R., Sweeney, D. J., & Williams, T. A. (2006). *Estadística para administración y economía*. Col. Cruz Manca, Santa Fe, México, D. F.: Cengage Learning Editores, S. A. de C. V.

- Arévalo, J. J., Castro, A., & Villa, É. (2002). Un análisis del ciclo económico en competencia imperfecta. *Revista de Economía Institucional*, vol. 4, núm. 7, segundo semestre, 11-39 Pp.
- Arreguín, M.; Hernández, A.; Sampayo, S.; Taco, P. *Fundamentos Matemáticos de Regresión Lineal Parte III*; Casa Editora del Polo: Ecuador; ISBN Español.
- Arriaza, G. A., Fernández, P. F., López, S. M., Muñoz, M. M., Pérez, P. S., & Sánchez, N. A. (2008). *Estadística Básica con R y R-Commander*. Cádiz, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.
- Atucha, A. J., & Gualdoni, P. (2018). *El funcionamiento de los mercados*. Mar de Plata, Argentina: Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad Nacional de Mar del Plata.
- Avdoshin, S. M., & Pesotskaya, E. Y. (2011). Software risk management. *National Research University Higher School of Economics*, 1-6 Pp.
- Baquela, E. G., & Redchuk, A. (2013). *Optimización Matemática con R. Volumen I: Introducción al modelado y resolución de problemas*. Madrid, España: Bubok Publishing S. L.
- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., & Shetty, C. M. (2009). *Nonlinear programming: Theory and applications*. Hoboken, New Jersey, U.S.A.: John Wiley & Sons, Inc, Publication.
- Bertsimas, D., & Tsitsiklis, J. N. (1997). *Introduction to Linear Optimization*. Belmont, Mass. U.S.A.: Athena Scientific, Belmont, Massachusetts.

- Bertsimas, D., Teo, C., & Vohra, R. (1999). On dependent randomized rounding algorithms. *ELSEVIER*, 105 –114.
- Bhatt, A., Das, V., & Sundaram, V. (2011). Economic analysis of malaria control programs: A review of the literature. *Malaria Journal*, 10(1), 202.
- Birge, J. R., & Louveaux, F. (2011). *Introduction to Stochastic Programming*. New York, USA: Springer Science+Business Media, .
- Brambila, P. J. (2011). *Bioeconomía: Instrumentos para su análisis económico*. Texcoco, estado de México. México: Secretaría de Agricultura, Ganadería, Desarrollo Rural, Pesca y Alimentación (SAGARPA) y Colegio de Postgraduados (COLPOS).
- Broz, D., Mac Donagh, P., Arce, J., & Yapura, P. (2017). La Investigación Operativa, la Ingeniería Forestal y los Problemas Sectoriales: Ante la Necesidad de un Cambio de Paradigma. *Yvyrareta*, 64-72.
- Burbano, R., Espinosa, A. M., & Horna, L. (2018). *Economía para matemáticos*. Quito, Ecuador: Escuela Politécnica Nacional (EPN).
- Burkard, R., Dell'Amico, M., & Martello, S. (2012). *Operations research: Theory and practice*. New Jersey, U.S.A.: Springer Science & Business Media.
- Bustos, F. E. (2023). *La importancia del teorema de suficiencia de Kuhn-Tucker en la tarea de decisiones organizacionales*.

Carácas, Venezuela: Escuela Superior de Cómputo de Venezuela.

Cabrera, G. E., & Díaz, G. E. (2021). *Manual de uso de Jupyter Notebook para aplicaciones docentes*. Madrid, España: Universidad Complutense de Madrid.

Camps, P. R., Casillas, S. L., Costal, C. D., Gibert, G. M., Martín, E. C., & Pérez, M. O. (2005). *Software libre. Bases de datos*. Av. Tibidado, 39-43, Barcelona España: Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya. Eureka Media, SL.

Capa, S. H. (2015). *Probabilidades y estadística para una gestión científica de la información*. Quito, Ecuador: Escuela Politécnica Nacional .

Carballo, R. E., & Peñate, P. E. (2014). *Benchmarking de Herramientas Forenses Móviles*. Managua: COMPDES, UNAN, Managua.

Carro, P. R. (2014). *Investigación de operaciones en administración. Ira Edición*. Mar de Plata, Provincia de Buenos Aires, Argentina: Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. Universidad Nacional de Mar de Plata.

Cestero, E. V., & Caballero, A. M. (2017). *Data Science y Redes Complejas. Métodos y aplicaciones*. Tomás Bretón, 21-28045, Madrid, España: Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S. A.

Challenger, P. I., Díaz, R. Y., & Becerra, G. R. (Abril-Junio, 2014). El lenguaje de programación Python. *Ciencias Holguín, vol. XX, núm. 2.*, 1-13.

- Dantzig, G. B. (1963). *Linear Programming and Extensions*. Chichester, West Sussex, U.S.A.: Princeton University Press.
- Dantzig, G. B., & Wolfe, P. (1954). The decomposition principle for linear programming. *Operations Research*, 2(1), 76-81.
- Daza, P. J. (2006). *Estadística Aplicada con Excel*. Lima, Perú: Grupo Editorial Megabyte s.a.c.
- De los Reyes García, M. M., & Romero, C. J. (2004). *Investigación de operaciones I*. UAM Unidad Azcapotzalco. Av. San Pablo 180. Col. Reynosa Tamaulipas. Delegación Azcapotzalco. México, D. F.: División de Ciencias Básicas e Ingeniería. Departamento de Sistemas. Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco.
- De Mendiburu, F. (2007). *Análisis estadístico con R*. Av. Túpac Amaru 210, Rímac 15333, Lima, Perú: Sección de extensión universitaria y proyección social. Centro de estudiantes de facultad de ingeniería económica y ciencias sociales. Universidad Nacional de Ingeniería.
- De Mendiburu, F. (2017). *Tutorial de agricolae (Versión 1.2-8)*. La Molina-Perú: Departamento Académico de Estadística e Informática de la Facultad de Economía y Planificación. Universidad Nacional Agraria La Molina-Perú.
- Delgado, Q. S. (2023). *Aprende Python*. Ciudad de México, México: Mundi Prensa.

- Deng, Z. X., & Wang, X. (2022). A survey on non-predetermined goal programming. *European Journal of Operational Research*, 297(2), 1115-1133.
- Devia, J., Azacon, J., López, N., Villarroel, Z., Carvajal, A., Rodríguez, B., . . . Suárez, F. (2012). *Software TORA*. Maturín, Venezuela: Núcleo de Monagas. Universidad de Oriente de Venezuela.
- Di Perro, M. (2017). What is the Blocchaing? *School of Computing at DePaul University, Chicago, IL, USA*, 92-95.
- Díaz, C. M., & Gómez, M. P. (2011). *Comportamiento de volatilidad del tipo de México 1970 a 2010*. Michoacán, México: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- DiLorenzo, T. J. (1992). El Mito del Monopolio Natural. *The Review of Austrian Economics Vol. 9, No. 2* , 1-15 Pp.
- Eiselt, H. A., & Sandblom, C. L. (2009). *Integer programming: Theory and practice*. New Jersey, U.S.A.: Springer.
- Engler, P. A. (2009). *Estrategias del manejo del riesgo*. Quilamapu, Chillán, Chile: TRAMA Impresores S. A.
- Galindo, D. T. (2006). *Estadística. Métodos y Aplicaciones*. Quito, Ecuador: Prociencia Editores.
- Garcés, R. A. (2020). *Optimización convexa. Aplicaciones en operación y dinámica de sistemas de potencia*. Pereira, Colombia: Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.

- García, M. A., & García, S. (2015). Investigación de operaciones en el control de enfermedades parasitarias. *Revista de Investigación Académica*, 26, 1-12.
- García, M. M., & Romero, C. J. (2004). *Investigación de operaciones I. Ira parte*. Delegación Azcapotzalco, D. F.: Universidad Autónoma Metropolitana (UAM-Azcapotzalco).
- Gen, M., & Cheng, R. (2000). *Genetic algorithms and engineering optimization*. New York, U.S.A.: Wiley-Interscience Publication.
- Gómez, G. M., Danglot, B. C., & Vega, F. L. (2003). Sinopsis de pruebas estadísticas no paramétricas. Cuándo usarlas. *Revista Mexicana de Pediatría*, 10.
- Gómez, P. M. (2006). *Introducción a la microeconomía*. Barcelona, España: Universidad de Barcelona.
- González, B. G. (1985). *Métodos Estadísticos y Principios de Diseño Experimental*. Quito, Ecuador: Facultad de Ciencias Agrícolas. Universidad Central del Ecuador.
- González, B. G. (2010). *Métodos estadísticos y principios de diseño experimental*. Quito, Ecuador: Universidad Central del Ecuador.
- González, J. A., García, S. J., Chalita, T. L., Matus, G. J., Cruz, G. B., Sangerman, J. D., . . . Fortis, H. M. (2012). Modelo de equilibrio espacial para determinar costos de transporte en la distribución de durazno en México. *Revista Mexicana de Ciencias Agrícolas Vol.3 Núm.4* , 701-712 Pp.

- Grossman, S. S., & Flores, G. J. (2012). *Álgebra Lineal*. México D. F.: Colonia Santa Fe, Delegación Álvaro Obregón, México D. F.
- Guerrero, S. H. (2009). *Programación Lineal Aplicada*. Bogotá, Colombia: Ecoe Ediciones.
- Gujarati, D. N., & Porter, D. C. (2010). *Econometría*. Delegación Álvaro Obregón, México, D. F.: McGraw-Hill/Interamericana Editorres, S.A. de C.V.
- Hernández, N., Soto, F., & Caballero, A. (2009). Modelos de simulación de cultivos, características y usos. *Cultivos Tropicales*, vol. 30, núm. 1, 73-82 Pp.
- Hernandez, S. R., Fernandez, C. C., & Baptista, L. P. (2006). *Metodología de la investigación*. Colonia Desarrollo Santa Fe, Delegación Álvaro Obregón, México, D. F. : McGraw Hill/Interamericana Editores, S.A. de C. V.
- Herrera, A. L. (2009). *Perspecctivas para la carna de bovino en México aplicando un sistema de trazabilidad*. Campus Montecillo, Texcoco, estado de México: Colegio de Postgraduados. Tesis de maestría.
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2010). *Introducción a la investigación de operaciones*. Delegación Álvaro Obregón, México D. F.: McGraw-Hill Companies, Inc.
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2015). *Operations Reseach*. New York, U.S.A.: McGraw-Hill Education.

- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2015). *Operations Research*. New York, U.S.A.: McGraw-Hill Education.
- Hung, M. T., & Hung, C. C. (2019). A review of non-predetermined goal programming: Methods, applications, and challenges. *European Journal of Operational Research*, 274(3), 909-924.
- Hurtado, M. J., & Gómez, F. R. (2010). *Diseño Experimental*. Valencia, España: Universidad de Valencia.
- Iusem, A. N. (2003). On the convergence properties of the projected gradient method for convex optimization. *Computational and Applied Mathematics*, 37–52.
- Kaiser, H. M., & Messer, K. D. (2011). *Mathematical Programming for Agricultural, Environmental, and Resource Economics*. Rosewood Drive, Danvers, United States of America: John Wiley & Sons, Inc.
- Kmenta, J. (1971). *Elements of econometrics*. Collier Macmillan Canada, Inc.: Macmillan Publishing Company.
- Larrañaga, L. J., Zulueta, G. E., Elizagarate, U. F., & Alzola, B. J. (2020). Algoritmos Meméticos en problemas de Investigación Operativa. *Escuela Universitaria de Ingeniería de Vitoria-Gasteiz. Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV-EHU)*, 1-19.
- Leek, J. T., & Peng, R. D. (2015). *Statistics: P values are just the tip of the iceberg*. Maryland, USA.: School of Public Health in Baltimore.

- Li, H., Zhang, J., & Zhang, X. (2019). Randomized rounding for general integer programs. *Operations Research Letters*, 47(2), 164-169.
- Li, W., & Yang, L. (2022). A novel non-predetermined goal programming model for renewable energy planning. *Energy*, 220, 122772.
- Lind, D. A., Marchal, W. G., & Mason, R. D. (2004). *Estadística para Administración y Economía*. Col. del Valle, México D. F.: Alfaomega Grupo Editor S. A. de C. V.
- Lind, D. A., Marchal, W. G., & Mason, R. D. (2006). *Estadística para Administración y Economía*. Col. del Valle, México D. F.: Alfa Omega Grupo Editor S. A. de C. V.
- López, B. E., & González, R. B. (2014). *Diseño y Análisis de Experimentos. Fundamentos y Aplicaciones en Agronomía*. Ciudad Universitaria zona 12. Ciudad de Guatemala: Universidad de San Carlos de Guatemala, Facultad de Agronomía.
- Loubet, B. (2020). *Excel: Herramienta Solver*. Centro Universitario, Ciudad de Mendoza. Provincia de Mendoza, Argentina.: Facultad de ciencias económicas. Universidad Nacional de Cuyo.
- Ipízar, M. J. (12 de Octubre de 2023). *Universidad Latina*. Obtenido de La organización industrial: <https://cisprocr.com/cispro/system/files/Clase%209%20Organizaci%C3%B3n%20Industrial.pdf>

- Luenberger, D. G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming*. New Jersey, U.S.A.: Springer.
- Machado, D. E., & Coto, F. H. (2017). Sistema de adquisición de datos con Python y Arduino. *Revista, Ciencia, Ingeniería y Desarrollo Tec Lerdo*, 1-6.
- Madrid, C. C. (2020). Filosofía de la ciencia del cambio climático: Modelos, problemas e incertidumbres. *Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia*, vol. 20, núm. 41, 201-234 Pp.
- Martínez, Á. (26/10/2023 de Octubre 26 de 2023). *Optimización global*. Obtenido de Optimización global: http://www.dma.uvigo.es/~aurea/Optimizaci%C3%9Bn_global.pdf?fbclid=IwAR1z2kTahmpEcDLkOYNhhObwwxDVviGT62FDMF6uGU1byE4MU39bTK_6L68
- Martínez, A. L. (2013). *Modelo de Programación Cuadrática y Ratios Financieros para minimizar el riesgo de las inversiones en la Bolsa de Valores de Lima*. Lima, Perú: Facultad de Ciencias Matemáticas, E.A.P. de Investigación Operativa. Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- Mehrotra, S. (2022). Non-predetermined goal programming: A review of recent advances. *Journal of the Operational Research Society*, 73(5), 1018-1032.
- Mendiburu, F. (2007). *Análisis Estadístico con "R"*. Lima, Perú: Sección de Extensión Universitaria y Proyección Social. Centro de Estudios de la Facultad de Ingeniería Económica y Ciencias Sociales. Universidad Nacional de Ingeniería.

- Mendiburu, F. (2015). *Agricolae tutorial (Version 1.2-3)*. La Molina, Perú: Departamento Académico de Estadística e Informática de la Facultad de Economía y Planificación. Universidad Agraria La Molina.
- Mijangos, L. J. (2019). *Investigación de Operaciones II*. Tuxtla Guitiérrez, Chiapas, México: Instituto Tecnológico de Tuxtla Guitiérrez.
- Moghaddam, S. A., Arabshahi, A., Yazdani, D., & Dehshibi, M. M. (2012). A novel Hybrid Algorithm for Optimization in Multimodal Dynamic Environments. *ResearchGate*, 143-148.
- Montgomery, D. C. (2004). *Diseño y análisis de experimentos*. México, D. F.: Limusa S. A. de C. V.
- Montgomery, D. C. (2012). *Design and analysis of experiments*. Arizona, USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Muñoz, C. R., Ochoa, H. M., & Morales, G. M. (2011). *Investigación de operaciones*. Delegación Álvaro Obregón, México D. F.: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. DE C.V.
- Murillo, F. E. (2016). Riesgo agropecuario. *Revista de la Carrera de Ingeniería Agronómica – UMSA*, 103-127 Pp.
- Navidi, W. (2006). *Estadística para ingenieros y científicos*. Colonia Desarrollo Santa Fe, Delegación Álvaro Obregón, México, D. F.: McGrawHill McGraw-Hill/Interamericana Editores, S. A. de C. V.

- Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical optimization*. New Jersey, U.S.A.: Springer Science & Business Media.
- Nolasco, V. J. (2018). *Python. Aplicaciones prácticas*. Calle Jarama, 3A, Poligono Industrial Igarsa. Paracuellos de Jarama, Madrid, España: Ra-Ma Editorial.
- Oliveira, W., Rocha, R. S., & Katz, N. (2010). Esquistossomose mansônica: situação atual e perspectivas de controle. *Revista da Sociedade Brasileira de Medicina Tropical*, 43(2), 123-130.
- O'Neill, P., & Thomas, J. (2010). Mathematical modelling of infectious diseases. *Nature Reviews Microbiology*, 8(11), 803-814.
- Padrón, C. E. (1996). *Diseños Experimentales: con aplicaciones a la agricultura y la ganadería*. Ciudad de México, México: Trillas. Mex.
- Parra, R. F. (2016). *Curso de Estadística con R*. Santander, Cantabria: Instituto Cántabro de Estadística.
- Pérez, A. E. (2017). *Relajación Lagrangiana, métodos heurísticos y metaheurísticos en algunos modelos de Localización e Inventarios*. Valladolid, España: Máster en investigación en Matemáticas, Universidad de Valladolid.
- Prawda, W. J. (2004). *Métodos y modelos de investigación de operaciones Vol. I: Modelos determinísticos*. Ciudad de México, México: Limusa. Noriega Editores.
- Quintana, S. F. (octubre 2016/marzo 2017). Dinámica, escalas y dimensiones del cambio climático. *Tla-Melaua, revista de*

Ciencias Sociales. Facultad de Derecho y Ciencias Sociales, año 10, núm. 41, 180-200 Pp.

Ravindran, A., & Garg, D. P. (2018). *Meta-heuristics for optimization*. New Jersey, U.S.A.: Springer.

Rodríguez, C. E. (11 de Octubre de 2023). *La competencia imperfecta*. Obtenido de Biblioteca digital de la Universidad Católica Argentina:
<http://bibliotecadigital.uca.edu.ar/repositorio/contribuciones/competencia-imperfecta-carlos-rodriguez.pdf>

Rodríguez, V. A. (2007). Cambio climático, agua y agricultura. *Desarrollo Rural Sostenible, N° 1, II Etapa, 13-23 Pp.*

Rojas, C. L., & Rojas, C. L. (2000). *Exploración al diseño experimental*. Granada, España: Ciencia e Ingeniería Neogranadina, 9, 51–59. Universidad Militar Nueva Granada.

Romero, C., & Ventura, S. (2013). *Metaheuristics: Applications to optimization and machine learning*. New Jersey, U.S.A.: Springer.

Rosales, A. J. (2001). *Análisis y diseño en el espacio de estado utilizando Matlab*. Quito, Ecuador: Escuela de Ingeniería, Escuela Politécnica Nacional .

Rosell, E. K. (2022). *Optimización con programación dinámica*. Barcelons, España: Facultad de Matemáticas e Informática, Universidad de Barcelona.

- Rossum, V. G. (2009). *Tutorial Python versión 2.5.2*. Ciudad de México, México: Mundi Prensa.
- Salas, F. V. (2009). Modelos de negocio y nueva economía industrial. *Universia Business Review | Tercer Trimestre*, 1-24 Pp.
- Sampayo, M. S. (2019). *Apuntes de economía del medio ambiente*. Iztacala, D. F., México: Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
- Sarasa, C. A. (2017). *Gestión de la información web usando Python*. Rambla del Poblenou, 156. Barcelona, España.: Editorial UOC (Oberta UOC Publishing, SL).
- SEMARNAT, & CONAFOR. (2019). *Estrategia Nacional de Sanidad Forestal 2019-2024*. Ciudad de México, México.: Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales; Comisión Nacional Forestal.
- Szigeti, F., Cardillo, J., Hennet, J. C., & Calvet, J. L. (2014). El Método de Relajación Aplicado a Optimización de Sistemas Discretos. *ResearchGate*, 1-9.
- Taha, H. A. (2004). *Investigación de operaciones 7ma Edición*. Atlacomulco No. 500-5° piso. Col. Industrial Atoto. Naucalpan de Juárez, Edo. de México: Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
- Taha, H. A. (2012). *Investigación de Operaciones*. Fayetteville, Arkansas, USA: PEARSON EDUCACIÓN DE MÉXICO, S.A. de C.V.

- Taha, H. A. (2012). *Investigación de Operaciones*. Fayetteville, Arkansas, USA: PEARSON EDUCACIÓN DE MÉXICO, S.A. de C.V.
- Toledo, T. R. (2009). *El riesgo en la agricultura*. Quilamapu, Chillán, Chile: TRAMA Impresores S. A.
- Triola, M. F. (2004). *Estadística*. Col. Industrial Atoto, Naucalpan de Juárez, Edo. de México: Pearson Educación de México, S. A. de C. V.
- Trívez, B. F. (2004). Economía Espacial: una disciplina en auge. *Estudios de Economía Aplicada, Vol. 22-3*, 409-429 Pp.
- Urquía, M. A., & Martín, V. C. (2016). *Métodos de simulación y modelado*. Madrid, España: Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Valencia, N. E. (2018). *Investigación Operativa. Programación lineal, problemas resueltos con soluciones detalladas*. San Juan Bautista de Ambato, Provincia Tungurahua, Ecuador: Universidad Técnica de Ambato (UTA).
- Vanegas, C. J. (2018). *Metodología para la planeación de requerimientos de materiales-MRP*. Bogotá, Colombia: Facultad de Ingeniería. Especialización en Gerencia Integral de Proyectos. Universidad Militar Nueva Granada.
- Vásquez, A. V. (2014). *Diseños Experimentales con SAS*. Cajamarca, Perú: CONCYTEC FONDECYT.

- Vega, G. C. (05 de Mayo de 2021). *IESIP*. Obtenido de iesip.edu.ve:
<https://virtual.iesip.net/mod/page/view.php?id=5933>
- Velásquez, S., & Velásquez, R. (2012). Modelado con variables aleatorias en simulink utilizando simulación Montecarlo. *Universidad, Ciencia y Tecnología, Vol. 16, No. 64*, 203-211 Pp.
- Vercher, G. E. (2015). Soft Computing approaches to portfolio selection. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa. Vol. 31. No. 1*, 23-46.
- Vicéns, O. J., Herrarte, S. A., & Medina, M. E. (2005). *Análisis de la varianza (ANOVA)*. Distrito Federal, México: Trillas, S. A.
- Villota, C. E. (2010). *Control moderno y óptimo (MT 227C)*. Lima, Perú: Departamento Académico de Ingeniería Aplicada, Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Nacional de Ingeniería.
- Wackerly, D. D., Mendenhall III, W., & Scheaffer, R. L. (2010). *Estadística matemática con aplicaciones*. Col. Cruz Manca, Santa Fé. México, D.F.: Cengage Learning Editores, S.A.
- Wasserstein, R. L., & Lazar, N. A. (2016). *Advance online publication The American Statistician* .
- World, H. O. (2016). *Global technical strategy for malaria 2016-2030*. Geneva, Switzerland: Geneva, Switzerland: World Health Organization.

Zill, D. G., & Wright, W. S. (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas*.
Delegación Álvaro Obregón, México, D. F.: McGRAW-
HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.



La investigación operativa es una disciplina que aplica métodos analíticos avanzados para ayudar a tomar mejores decisiones. Su objetivo principal es proporcionar una base científica para los procesos de toma de decisiones en diversas áreas, tales como la economía, la ingeniería, la logística y la gestión ambiental.



Moisés Arreguín Sámano

Profesor e investigador de la Universidad Estatal de Bolívar (UEB), Ecuador.



Ángel Leyva-Ovalle

Docente Investigador Universidad Autónoma Chapingo (UACH-DiCiFo), México. Ingeniero forestal con orientación en economía y ordenación por la Universidad Autónoma Chapingo (UACH), con experiencia en la División de Ciencias Forestales (DiCiFo), específicamente en el Departamento de Productos Forestales.



Gabriela Johana Chisaguano Taipe

Licenciatura en Educación mención Educación Básica, Maestrante en Educación mención Enseñanza de la Matemática de la Universidad Técnica de Ambato, Docente de Nivel Primario y Secundario en Educación Fiscal del Ministerio de Educación – Dirección Distrital 18D04 Patate - San Pedro de Pelileo – Educación.



Israel Patricio Pachacama Campaña

Ingeniero en Electromecánica, Magíster en Electromecánica, Instructor en Escuelas permanentes de Capacitación. Docente en la Universidad Técnica de Cotopaxi en las asignaturas correspondientes a las Ciencias Exactas como la Matemática y la Física.

ISBN: 978-9942-621-97-9



9 789942 621979