MATEMÁTICA II APLICADA A LA ADMINISTRACIÓN Y FINANZAS

© FRANCISCO EDUARDO TOSCANO GUERRERO,
ÁNGEL EDUARDO RODRÍGUEZ SOLARTE,
CARINA DEL ROCÍO CEVALLOS RAMOS,
ÁNGEL GERARDO CASTELO SALAZAR

CASA EDITORA DEL POLO

MATEMÁTICA II
APLICADA A LA ADMINISTRACIÓN Y FINANZAS

Toscano Guerrero Francisco Eduardo

Rodriguez Solarte Angel Eduardo

Cevallos Ramos Carina Del Rocío

Castelo Salazar Angel Gerardo

CASA EDITORA DEL POLO

MATEMÁTICA II APLICADA A LA ADMINISTRACIÓN Y FINANZAS

Toscano Guerrero Francisco Eduardo
https://Orcid.org/0000-0002-3951-7774
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Rodriguez Solarte Angel Eduardo
https://Orcid.org/0000-0001-6023-3170
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Cevallos Ramos Carina Del Rocío
https://Orcid.org/0000-0001-6639-9577
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Castelo Salazar Angel Gerardo
https://Orcid.org/0000-0003-3859-6105
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

CASA EDITORA DEL POLO

Casa Editora del Polo - CASEDELPO CIA. LTDA.
Departamento de Edición

Editado y distribuido por:

Editorial: Casa Editora del Polo
Sello Editorial: 978-9942-816
Manta, Manabí, Ecuador. 2019
Teléfono: (05) 6051775 / 0991871420
Web: www.casedelpo.com
ISBN: 978-9942-621-62-7
DOI: https://doi.org/10.23857/ 978-9942-621-62-7

© Primera edición
© Febrero - 2024
Impreso en Ecuador

Revisión, Ortografía y Redacción:
Lic. Jessica Mero Vélez

Diseño de Portada:
Michael Josué Suárez-Espinar

Diagramación:
Ing. Edwin Alejandro Delgado-Veliz

Director Editorial:
Dra. Tibisay Milene Lamus-García

Constancia de Arbitraje

La Casa Editora del Polo, hace constar que este libro proviene de una investigación realizada por los autores, siendo sometido a un arbitraje bajo el sistema de doble ciego (peer review), de contenido y forma por jurados especialistas. Además, se realizó una revisión del enfoque, paradigma y método investigativo; desde la matriz epistémica asumida por los autores, aplicándose las normas APA, Sexta Edición, proceso de anti plagio en línea Plagiarisma, garantizándose así la cientificidad de la obra.

Comité Editorial

Contenido

PRÓLOGO

En el apasionante cruce de la estadística, la economía y el análisis de series de tiempo, encontramos un conjunto de herramientas que permiten descifrar los misterios ocultos en los datos y tomar decisiones informadas en un mundo cada vez más impulsado por la información. Este libro es un faro que ilumina el camino a través de este intrincado terreno, ofreciendo una guía integral sobre cómo utilizar la regresión lineal, los modelos econométricos y el análisis de series de tiempo para comprender, predecir y modelar fenómenos económicos y financieros.

La estadística es el lenguaje de los datos, y la regresión lineal es una de sus herramientas más poderosas. En estas páginas, encontrarás una exploración profunda y clara de la regresión lineal, desde sus fundamentos hasta sus aplicaciones en la economía y las finanzas. Los autores han desglosado los conceptos complejos en explicaciones accesibles, utilizando ejemplos prácticos y ejercicios que te guiarán paso a paso en la construcción y evaluación de modelos de regresión.

Pero esto es solo el comienzo. Los modelos econométricos, que incorporan variables económicas y financieras, agregan un nivel adicional de sofisticación al análisis. Este libro te llevará a través de la teoría detrás de estos modelos y te mostrará cómo aplicarlos en situaciones del mundo real. Aprenderás a comprender y analizar la relación entre variables económicas, realizar pruebas de hipótesis y utilizar modelos econométricos para pronosticar tendencias y tomar decisiones estratégicas.

El análisis de series de tiempo, por su parte, es una herramienta esencial para comprender cómo los datos evolucionan a lo largo del tiempo. Este libro te llevará a través de la modelización de series temporales, desde la identificación de patrones estacionales y tendencias hasta la construcción de modelos que permitan realizar predicciones precisas en un mundo en constante cambio.

Los autores de esta obra han combinado con maestría la teoría con la práctica. A medida que avanzas en las páginas de este libro, encontrarás ejemplos del mundo real que ilustran cómo estas herramientas pueden utilizarse para abordar problemas económicos y financieros reales. Descubrirás cómo aplicar estos métodos para tomar decisiones más informadas en contextos económicos, desde la inversión hasta la política pública.

Este libro es una invitación a un emocionante viaje a través del análisis de datos económicos y financieros utilizando la estadística, la regresión lineal, los modelos econométricos y el análisis de series de tiempo. Tanto si eres un estudiante de economía en busca de una comprensión más profunda, un analista financiero que busca mejorar sus habilidades o un profesional de la estadística interesado en el mundo económico, aquí encontrarás una guía valiosa y completa.

En un mundo cada vez más impulsado por los datos,

Matemática II Aplicada a la administración y finanzas

la habilidad para entender y aprovechar estas poderosas herramientas es esencial. Este libro es tu brújula en este emocionante viaje. ¡Prepárate para embarcarte en un emocionante viaje hacia el mundo de la estadística aplicada y la toma de decisiones basada en datos!.

INTRODUCCIÓN

En un mundo cada vez más impulsado por datos y cifras, la estadística se ha convertido en el idioma universal para descifrar los misterios ocultos en los números y extraer conocimiento valioso. En este emocionante viaje a través de la estadística, exploraremos una de las herramientas más versátiles y poderosas que existen: la regresión lineal. Pero no nos detendremos ahí. También adentraremos en el vasto territorio de los modelos econométricos y el análisis de series de tiempo, donde los datos financieros y económicos se convierten en nuestro lienzo para la exploración y la predicción.

La regresión lineal es la base sobre la cual se construyen muchos de los métodos estadísticos más avanzados. En su esencia, es una técnica que nos permite comprender y modelar la relación entre una variable de interés y una o más variables predictoras. A través de esta relación, podemos hacer predicciones, evaluar hipótesis y tomar decisiones informadas en una amplia variedad de campos, desde la ciencia social hasta la ingeniería, y, como lo veremos aquí, en el apasionante mundo de la economía y las finanzas.

Los modelos econométricos, por su parte, son la culminación de la estadística aplicada a los datos económicos y financieros. Estos modelos permiten explorar y cuantificar las relaciones complejas que existen en estos dominios, teniendo en cuenta factores como la inflación, el crecimiento económico, las tasas de interés y muchas otras variables que afectan nuestra vida cotidiana. A medida que avanzamos en este libro, te mostraremos cómo utilizar modelos econométricos para comprender y predecir fenómenos económicos, evaluar políticas públicas y tomar decisiones estratégicas en el ámbito financiero.

El análisis de series de tiempo, por último, es la herramienta que nos permite explorar cómo los datos evolucionan a lo largo del tiempo. En un mundo donde el tiempo es un factor crítico, entender las tendencias, los ciclos y las estacionalidades en los datos temporales es esencial. Aquí, te guiaremos a través de la identificación de patrones en series de tiempo, la construcción de modelos y la realización de predicciones precisas en contextos económicos y financieros.

A lo largo de este libro, encontrarás un equilibrio entre la teoría y la práctica. Hemos diseñado ejemplos del mundo real y ejercicios que te ayudarán a aplicar estos métodos de manera efectiva. Nuestra meta es proporcionarte las habilidades y el conocimiento necesarios para abordar problemas reales con confianza y precisión.

En un mundo donde los datos son la moneda del siglo XXI, la estadística, la regresión lineal, los modelos econométricos y el análisis de series de tiempo se convierten en herramientas esenciales para la toma de decisiones, la investigación y la comprensión del mundo que nos rodea. Este libro es tu entrada a este emocionante

mundo, donde los números cobran vida y la estadística se convierte en tu aliada para explorar, entender y prever. ¡Bienvenidos a este viaje!

CAPÍTULO I

FUNCIONES FUNDAMENTALES

1.1. Notación de funcion. ∈

Si un **x** ∈ **A** está correspondiéndose mediante **f** con un **y** ∈ **B**, escribiremos.

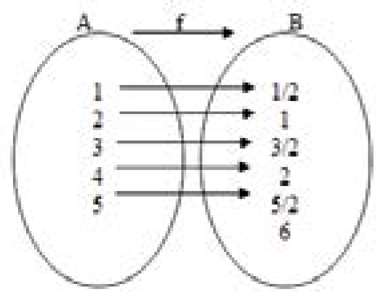
f : A → B

x → y =f(x) , Se dice la regla de correspondencia, donde **y** es la Imagen por **f** de **x** ∈ **A**

El conjunto A se llama DOMINIO de la función y corresponde al conjunto de números reales para los que está definida la aplicación.

El conjunto B se llama RECORRIDO de la función y corresponde al conjunto de números reales que son imágenes del conjunto A.

NOTA: y =f(x) <=> (x; y) ∈**f**. Así:



De este diagrama podemos decir que $y = f(x) = x/2$ luego:

$y = f(1) = 1/2 \quad \leftrightarrow \quad (1; 1/2) \in f$

$y = f(2) = 2/2 \quad \leftrightarrow \quad (2; 1) \in f$

$y = f(3) = 3/2 \quad \leftrightarrow \quad (3; 3/2) \in f$

$y = f(4) = 4/2 \quad \leftrightarrow \quad (4; 2) \in f$

$y = f(5) = 5/2 \quad \leftrightarrow \quad (5; 5/2) \in f$

1.2. Clases de funciones reales.

Función polinomial.- P es una función Polinómica si está definida por:

P: R $\rightarrow$ R

$x \rightarrow P(x)= a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$

Dónde: $a_{0;}\ a_{1;}\dots;\ a_n$ son números reales, fijos y se llaman los coeficientes del polinomio.

Si $a_n \neq 0$, entonces **n** es el grado del polinomio.

Entre las funciones polinomiales tenemos:

Funcion constante: $P(x)= a_0$

Funcion lineal: $P(x)= a_0+a_1x$

Funcion cuadratica: $P(x)= a_0+a_1x+a_2x^2$

Funcion racional: $R(x)= \dfrac{a_0 + a_1x + a_2x_2 + \dots + a_nx_n}{b_0 + b_1x + b_2x_2 + \dots + b_nx_n}$

Si P es una función real, podemos escribir funciones tales como:

$P(x) = 2$ Es una función polinomial de grado cero (0) Porque:

$P(x) = 2$ Puede escribirse. $P(x) = 2 = 2.\ 1 = 2.x°$, Entonces: $a_0 = 2$

$n = 0$ grado de la función polinomial.

En la función polinomial $P(x) = 1– 3x+4x^2$ tenemos que:

$a_0 = 1$
$a_1 =-3$
$a_2 = 4$, n= 2 (Grado de la función polinomial)

En $P(x)=7/3-\sqrt{2}\ x-x^2+7/4\ x^3$, tenemos que:

$a_0 = 7/31$

$a_1 =-\sqrt{2}$

$a_2 = -1$

$a_3 = 1/2$, n= 3 (Grado de la función polinomial)

Ejercicio:

A. Decir si las siguientes relaciones definen una función Polinómica y justifique la respuesta:

$f(x)= x-5$ $\quad$ $f(x)= -2$ $\quad$ $f(x)= 0$ $\quad$ $f(x)= x^2-1$

$f(x)= \sqrt{x}$ $\quad$ $f(x)= \sqrt[3]{x^3}$ $\quad$ $f(x)= 1/x$ $\quad$ $f(x)= \dfrac{x+1}{x-1}$

$f(x)= x^3-2x^2+x^{-2}$ $\qquad$ $f(x)= \dfrac{x}{x-2}$

B. Sea **f** una función de **R** en **R** definida por $f(x) = x^2-3x+4$, Calcular:

$f(2)= (2)^2-3(2)+4=4-6+4=2$

f(1)=...

f(1/3)=...

f(1/5)=...

f(3)=...

.

f(7)=...

C. Sea **f** una función de **Z** en **Z** definida por $f(x) = x^2 + 3x -4$, calcular:

f(2)=...

f(1)=...

f(1/2)=...

f(1/3)=...

$f(\sqrt{3})$=...

$f(1-\sqrt{2})$=...

D. Sea f una función de R en R definida así:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x \in Q \\ x+1 & \text{si } x \notin Q \end{cases}$$

f(-3/7)=1

$f(\sqrt{2})$=...

$f(\sqrt{4})$=...

$f(\sqrt{3}-1)$=...

f(0,75)=...

E. Cuál es la notación de las siguientes funciones de R en R.

1.- f, Asocia a cada número real su opuesto

$f: R \rightarrow R$

$x \rightarrow f(x) =-x$

2. g, asocia a cada número real su cubo.

Solución……...

3. h, asocia a cada número real su cuadrado menos 1

Solución...

4. k, asocia a cada número real el número -5

Solución...

5. f es una función de **Q** en **Q** que asocia a cada número racional con su opuesto sumando uno..

6. g, es una función de **Q** en **Q** que asocia a cada número entero a una potencia de base 2 del mismo número.

Solución:...

F.- Sea la función de **R** en **R** definida por f(x) =2x-3/5, cuál es el elemento del dominio que tenga -3/4 como imagen?..

G.- Si f es una función real definida por $f(x) = \frac{2x-3}{5}$ Cual es el elemento que tiene por imagen: 0**H.-** Sea una función f de **R-** $\{1\}$ en **R** definida por $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$, cuál es el elemento del dominio que tenga imagen el 2.

Funcion inyectiva.- Sea **f** una función:

$f: A \rightarrow B$

$x \rightarrow y = f(x)$,

Se dice que es una función inyectiva si.

$\forall x_1, x_2 \in A$, con

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Ejemplos

1) $f: R \rightarrow R$

$x \rightarrow f(x) = x^3$

SOL: $f(x_1) = f(x_2)$

$x_1^3 = x_2^3$

$x_1 = x_2 \Rightarrow$ función Inyectiva

2) $f: R \rightarrow R$

$x \rightarrow f(x) = x^2$

SOL: $f(x_1) = f(x_2)$

$x_1^2 = x_2^2$ $\qquad (-2)^2 = (2)^2$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ Función NO Inyectiva. $\qquad -2 \neq 2$

Nota: Gráficamente podemos ver si una función es inyectiva o no, trazando paralelas al eje **x**. Si alguna de estas corta a la gráfica en dos o más puntos, la función no será inyectiva, en caso contrario será inyectiva.

Funcion sobreyectiva.- Se dice que una función es sobreyectiva o suryectiva ssi.

$\forall\, y \in B, \exists x \in A$, tq

$f(x) = y$

Ejemplos:

1) $f: R \to R$

$x \to f(x) = sen(x)$; (función NO Sobreyectiva)

2) $f: R \to R^+$

$x \to f(x) = x^2$ (función Sobreyectiva)

Nota: Gráficamente podemos ver si una aplicación es Sobreyectiva o no. Sea **y** un elemento del conjunto de llegada, si la recta paralela al eje **x** que pasa por **y** corta al menos en un punto de la función, entonces **f** será Sobreyectiva, caso contrario no lo será.

Funcion biyectiva.- Cuando una función es Inyectiva y Sobreyectiva a la vez, se dirá biyectiva.

Ejemplo:

1) $f: R \to R$

$x \to f(x) = 2x-5$

Observación:

Si $f: A \to B$

Es una función Biyectiva entonces: Cardinalidad (A)=Cardinalidad (B)

Ejercicio. -

1. Determinar si las siguientes relaciones son funciones y en caso afirmativo verificar si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

a) $f: R \to R$; $f(x)=(x-1)/(x-2)$

b) $f: R \to R$; $f(x)=|X|:x$ y $f(0)=0$,

c) $f: R \to R$; $f(x)= |X|\, x$

d) $f: R \to R$; $f(x)=x-|X|$

e) $f: R^+ \to R$; $f(x)= 1-2/x^2$

2. Comprobar que las siguientes funciones son biyectivas.

a) f: R $\rightarrow$ R, definida por

$$f(x)=\begin{cases} -x, \text{ para, } x\leq 0 \\ -\sqrt{x}\text{ , para, } x\geq 0 \end{cases}$$

b) f: R$\rightarrow$ $\left]-1,1\right[$, definida por

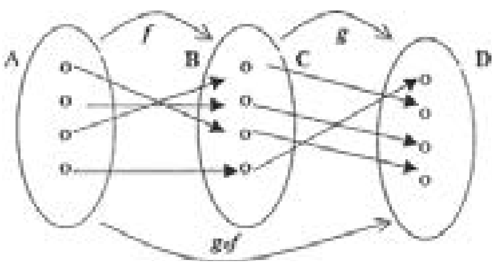
$$f(x)=\frac{x}{|x|+1}$$

Composición de funciones. - Sea f**:** A $\rightarrow$ B, una función de A en B, y g: C$\rightarrow$D, otra función de C en D, tal que

$$f(A)\subseteq C$$

Entonces podemos formar h=$g_o f$ (f compuesto con g).

$$h: A \rightarrow D, \text{ tal que } h(x)=(g_o f)(x)=g(f(x))$$



Ejemplo:

f**:** R $\rightarrow$ R

x$\rightarrow$ f(x) = 2x-5

g: R $\rightarrow$ R

x$\rightarrow$ g(x)= sen(x)

h: R $\rightarrow$ R

x$\rightarrow$h(x)=($f_o g$)(x)=f(g(x))=f(sen(x))=2sen(x)-5

Ejercicio .-

1) Sea f(x)=x^2 + 2x + 1; g(x)=-x+2; calcular $g_o f$ y $f_o g$.

2) Calcular $g_o f$ y $f_o g$ donde

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}} \text{ ; si....}x\geq 0;$$

$$g(x)=x+\sqrt{x} \text{ ; si.....}x\geq 0;$$

3) Expresar f como composición de dos o más funciones

$$f(x)=(ax^2+bx+c)^3$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}$$

4) Determinar $g_o f$ y $f_o g$ si:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{ si. } |x| \leq 1 \\ \dfrac{4}{x^2+1}, \text{ si. } |x| > 1 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{4}, \text{ si. } |x| \leq 1 \\ |1-x|, \text{ si. } |x| > 1 \end{cases}$$

Funcion inversa. - Sea $f: A \rightarrow B$ una función. Si existe otra función

$g: A \rightarrow B$, tq

$(f_o g)(x)=(g_o f)(x)=x$,

Diremos que g es la inversa de **f**, y la indicaremos con

$g = f^{-1}$

1.3. Teorema:

Una función admite inversa si es biyectiva.

Nota: Cuando una función no es biyectiva, se puede restringir el conjunto de salida y el de llegada para lograr que se cumpla el teorema y hallar su inversa, como por ejemplo el caso de las funciones trigonométricas.

Ejemplo.

Sea $f: R \rightarrow R$, con $f(x)= (2x-5)/7$;

Su inversa será $g: R \rightarrow R$, con $g(y)=(7y+5)/2$

$(f_o g)(x)=f[g(x)]=f[(7x+5/2)]= 2[(7x+5)/2]-5 \;\; /7=x$

Ejercicio. -

Hallar la inversa de tres funciones de los ejemplos anteriores.

Funciones exponenciales.- Para poder llegar a la definición de funciones exponenciales primeramente partimos de la definición de la potencia de un número positivo cuando el exponente es un número racional, por ejemplo 2^x está definido para cualquier valor racional de x.

Ejemplo.

$2^5 = 2\times2\times2\times2\times2 = 32 \qquad 2^{5/3}=\sqrt[3]{2^5}$

$2^0 = 1 \qquad 2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$

No, es tan simple definir 2^x cuando x es un número irracional por ejemplo que significa ¿$2^{\sqrt{3}}$?. La definición de la potencia irracional de un número positivo requiere un punto de vista más avanzado sin embargo puede darse una indicación intuitiva de que las potencias irracionales de números positivos pueden existir mostrando como puede interpretarse el significado de $2^{\sqrt{3}}$.

Teorema:si r y x son números racionales entonces:

i) Si $b > 1$: $\quad r < s$ implica que $b^r < b^s$

ii) Si $0 < b < 1$: $\quad r < s$ implica que $b^r > b^s$

Luego de $\sqrt{3}$ se puede tener un valor aproximado.

$$\sqrt{3} = 1.7321$$

$$2^1 < 2^{1.7} < 2^2$$

Definición de función exponencial y formalización. - SI $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces la función exponencial con base b es la función f definida por $f(x) = b^x$.

El dominio de f es el conjunto de los números reales y su codominio es el conjunto de los números positivos.

Obsérvese que si $b = 1$, se convierte en $f(x) = 1^x$, pero si x es un número real cualquiera, entonces $1^x = 1$, y por tanto se tiene una función constante. Por esta razón se impone la condición de que $b \neq 1$ en la definición anterior.

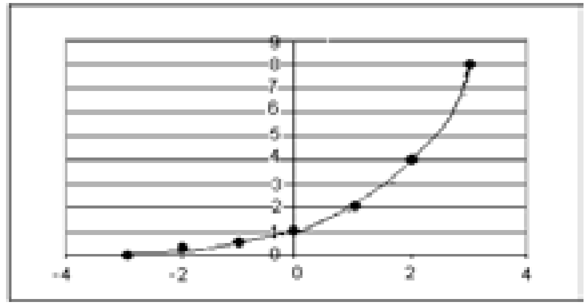
Ejemplos.

Si tenemos la función exponencial con base 2, es la función F tal que $F(x) = 2^x$.

Construimos la siguiente tabla:

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	⅛	¼	½	1	2	4	8

Gráfico de la función $f(x) = 2^x$

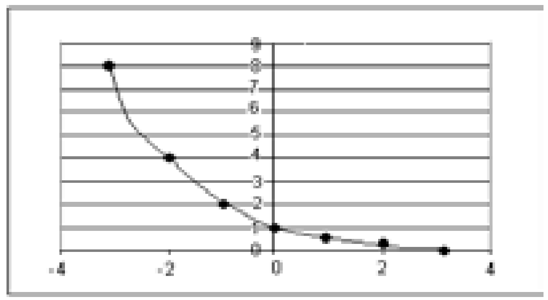


La función es creciente ya que la base (2) es mayor que 1. Veamos una función con la base menor que 1.

$$G(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(1/2)^x$	8	4	2	1	½	¼	⅛

La función es decreciente.



Ejercicio

1. Graficar las siguientes funciones exponenciales.

a) $y = 2^x$

b) $y = 3^{-x}$

c) $y = x^2$

d) $y = x^{-2}$

CAPÍTULO II

LÍMITES

2.1. Presentación

Nadie en su sano juicio puede sugerir que no se debe comenzar un curso de cálculo diferencial con la teoría de límites, en otras palabras, cualquier estudiante está preparado para aceptar como intuitivamente obvia la noción de límite y sus propiedades básicas.

En el desarrollo de este capítulo, comenzamos con una idea intuitiva de límite de una función para luego pasar a una formalización de la teoría de los límites sin tratar de entrar en la rigurosidad de la matemática.

Para esto, debemos hacer un formulario con las propiedades de los límites que usaremos en el desarrollo de este módulo, solo para estar seguros de lo que suponemos respecto de ellos y también para dar al estudiante, técnicas o artificios sobre el cálculo de límites de funciones algebraicas y transcendentes.

Como una aplicación del concepto límite, se tiene la continuidad de funciones, que se refiere aquellas que no presentan vacíos en sus gráficas. Estas ideas son las que nos proponemos desarrollar en este capítulo.

Objetivos.

- Internalizar en el estudiante el concepto de límite.

- Aplicar correctamente las propiedades y artificios, en la resolución de ejercicios.

- Desarrollar la capacidad intelectual del estudiante para que pueda comprender la aplicación de los límites de una función.

- Explicar la continuidad de una función en un punto.

- Determinar si una función es continua o no, aplicando la definición de continuidad.

2.2. Orientación metodológica

El estudio de este Capítulo lo debe efectuar por etapas, así se recomienda iniciar el estudio de límites con: límite de una variable (idea intuitiva de límite), límite de una función, límites a derecha y a izquierda, propiedades los límites, y luego que se haya logrado una buena comprensión de esta parte, pasar a la siguiente, en la que se trata de la aplicación de artificios en la resolución de límites algebraicos y trascendentes.

Por ultimo estudie la continuidad como una aplicación de los límites.

Se le recomienda hacer un formulario con las propiedades y los artificios utilizados, para que luego pueda ser utilizado en la resolución de los ejercicios propuestos.

2.3. Contenido de límites

2.3.1. Límite de una variable

La noción de una variable que se aproxima a un límite se encuentra por ejemplo en la geometría elemental cuando consideramos el área de un círculo Ac y el área de un polígono inscrito Ap con un primero n cualquiera de los lados, y se supone que n crece infinitamente. Esta área variable Ap área del polígono tiende hacia el límite que es el área del círculo Ac.

Matemática II Aplicada a la administración y finanzas

En este caso la variable área de un polígono Ap aumenta indefinidamente y la diferencia área del polígono menos área del círculo $|Ap - Ac|$ va disminuyendo, hasta que finalmente llega a ser menor que cualquier número positivo escogido de ante mano sin importar lo pequeño que este haya escogido. De la misma manera si consideramos un polígono circunscrito de n lados.

El concepto de límite de una variable se precisa mediante la siguiente definición.

"Se dice que una variable x tiende a una constante a, como límite, cuando los valores sucesivos de x son tales que el valor numérico de la diferencia $|x \quad a|$ puede llegar a ser, finalmente, menor que cualquier número positivo predeterminado, tan pequeño como se quiera"

La relación así definida se escribe $\lim x = a$ por conveniencia, nos serviremos de la notación $x \to a$ que se leerá: "*x* tiende hacia el límite *a*" ó, más brevemente "*x* tiende a *a*".

2.3.2.Límite de una función

Se tiene una variable *x* y una función dada *f(x)*; y se supone que la variable *x* recibe valores tales que $x \to a$. Tenemos entonces que examinar los valores de la variable dependiente *f(x)* e investigar, particularmente, si *f(x)* tiende también a un límite. Si efectivamente existe una constante "A" tal que $\lim f(x) = A$, entonces se expresa esta relación escribiendo: $\lim_{x \to a} f(x) = A$

y se leerá "el límite de *f(x)* cuando *x* tiende a "*a*" es "A".

"La noción fundamental del concepto del límite de una función es la de que siempre que *x* se aproxime a "*a*", ya sea por la derecha como por la izquierda, sin llegar nunca a alcanzar este valor, *f(x)* se aproxima a "A".

2.3.3. Límites a derecha y a izquierda

Si consideramos que *a* es fijo y *x* es móvil, entonces *x* puede acercarse a *a*, por la izquierda o por la derecha, lo cual se indica escribiendo $x \to a^-$ y $x \to a^+$ respectivamente.

Por lo tanto:

$\lim_{x \to a^+} f(x) = A_D$ Se denomina límite a la derecha

^

$\lim_{x \to a^-} f(x) = A_I$ Se denomina límite a la izquierda

Es evidente que la existencia de *lím f(x)*, implica la del límite por la izquierda y la del límite por la derecha no implica necesariamente la existencia del límite por la izquierda y viceversa.

$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = A$ sss $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = A$

Nota: Si los límites laterales son diferentes, entonces "no existe"

límite. Esto es válido si el límite es $\pm\infty$

2.3.4. Aproximación al límite

El límite de una función está íntimamente unido a su representación gráfica, y a la interpretación de la misma, debido a que lo que nos indica es el comportamiento o tendencia de la gráfica. Por esta razón, el concepto de límite es básico en el análisis matemático. A continuación procedemos a calcular el límite de una función en el punto mediante el uso de las tablas de valores. Así por ejemplo.

1. Dada la función $f(x) = x^2 - 1$. Calcular su límite A cuando · $x \to 2$

Para esto consideremos valores cercanos a 2, tanto a la izquierda como por la derecha, de acuerdo a la siguiente tabla.

δ_{izq} | δ_{der}

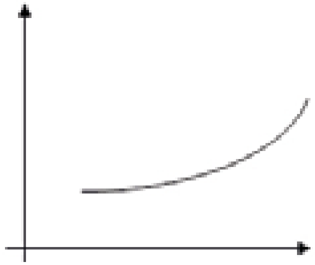
x	1.9	1.99	1.999	1.9999	2		2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	2.61	2.96	2.996	2.9996	3		3.0004	3.004	3.04	3.41

$\sum_{izq}$ | $\sum_{der}$

Podemos ver que a medida que tomamos valores de *x* más próximos a 2, tanto por la izquierda como por la derecha, los valores de *f(x)* se aproximan a 3.

Entonces: $\lim_{x \to 2} (x^2 - 1) = 3$

Si representamos en un sistema cartesiano tenemos:



Del gráfico podemos concluir, que mientras más nos acercamos al valor que tiende a *x*, el incremento $|\delta|$ a izquierda a derecha se va haciendo más pequeño:

1.99<2<2.01 δ =0.01

1.999<2<2.001 δ =0.001

lo mismo sucede en el eje de los límites, en el cual mientras más nos acercamos al valor del límite, el incremento $|\in|$ se va haciendo más pequeño:

2.96<3<3.04 $\in$ =0.04

2.996<3<3.004 $\in$ =0.004

como conclusión podemos sacar que la variable *x*, tiende al límite 2 cuando los valores sucesivos en *x* son tales que el valor numérico de la diferencia $|x-2|$ puede ser finalmente, menor, que cualquier número positivo predeterminado, tan pequeño como se quiera.

1. Sea la función $f(x)=\dfrac{2x^2-7x-4}{x-4}$ Calcular el límite A, cuando $x \to 4$

Consideremos valores cercanos a 4, de acuerdo a la siguiente tabla.

x	3	3.2	3.4	3.6	3.8	3.9	4	4.1	4.2	4.4	4.6	4.8	5
f(x)	7	7.4	7.8	8.2	8.6	8.8	$\frac{0}{0}$	9.2	9.4	9.8	10.2	10.8	11

Entonces: $\lim\limits_{x\to 4}=\dfrac{2x^2-7x-4}{x-4}=\dfrac{0}{0}$

Pero esto no significa que no existe el límite de *f(x)* cuando $x \to 4$, por lo tanto más adelante vamos a estudiar cómo resolver los límites en los cuales se producen indeterminaciones

tales como $\frac{c}{0};\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};0.\infty;\infty-\infty;0^0;\infty^0;1^\infty$

En lo que sigue, establecemos las propiedades de los límites y se da una técnica que nos permite calcular muchos límites de funciones algebraicas sin tener que recurrir ni a tablas de valores ni a gráficas.

El uso de las tablas de valores y gráficas para calcular el límite de una función está bien para introducir el concepto y aclarar su significado, sin embargo, se puede tener problemas tales como:

- La gráfica de la función puede resultar difícil de trazar.

- El uso de la calculadora resulta un tanto complicado

- No siempre el valor que se puede inferir de la tabla es correcto.

Como sucede muy a menudo en Matemática, se puede tomar atajos que nos permiten efectuar el cálculo de límite rápidamente. Esto se logra con el uso adecuado de algunas propiedades de los límites.

2.4. Propiedades de los límites

1. El límite de una constante k cuando $x \to a$ es igual a la constante:

$$\lim_{x \to a} k = k$$

2. El límite de la función identidad cuando $x \to a$ es a:

$$\lim_{x \to a} k = a$$

3. El límite del producto de una constante por una función, es igual a la constante por el límite de la función cuando $x \to a$.

$$\lim_{x \to a} [c\, f(x)] = c . \lim_{x \to a} f(x)$$

4. El límite de la suma resta de dos o más funciones cuando $x \to a$, es igual a la suma o resta de los límites de dichas funciones cuando $x \to a$.

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x$$

5. El límite del producto de dos funciones cuando $x \to a$ es igual al producto de los límites de las funciones cuando $x \to a$.

$$\lim_{x \to a} [f(x) . g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x)$$

6. El límite del cociente de dos funciones cuando $x \to a$, es igual al cociente de los límites de las funciones cuando $x \to a$.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

7. El límite de una potencia de una función cuando $x \to a$, es igual a la potencia del límite de la función cuando $x \to a$.

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n \qquad n \in Z \text{ (enteros), si } n \in Z^- \Rightarrow f(a) \neq 0$$

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{1/n} = [\lim_{x \to a} f(x)]^{1/n} \qquad n \in N \text{ (natural), si } n \in \text{pares} \Rightarrow f(a) \neq 0$$

8. $\lim_{x \to a} [\ln f(x)] = \ln [\lim_{x \to a} f(x)]$

9. $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = [\lim_{x \to a} f(x)]^{\lim_{x \to a} g(x)}$

10. $\lim_{x \to a} |f(x)| = |\lim_{x \to a} f(x)|$

2.5. Aplicaciones de las propiedades

1. $$\lim_{x\to 3}(x+15) = \lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 15$$

$$= 3+15 = 18$$

2. $$\lim_{x\to 3}(x-15) = \lim_{x\to 3} x - \lim_{x\to 3} 15$$

$$= 3-15 = -12$$

3. $$\lim_{x\to 5}(4x) = 4\lim_{x\to 5} x$$

$$= 4.5 = 20$$

4. $$\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{x-5} = \frac{\lim_{x\to 5} x + 5}{\lim_{x\to 5} x - 5} = \frac{\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 5}{\lim_{x\to 5} x - \lim_{x\to 5} 5}$$

$$= \frac{3+5}{3-5} = \frac{8}{2} = 4$$

5. $$\lim_{x\to 2} x^3 = \left[\lim_{x\to 2} x\right]^3 = 2^3 = 8$$

6. $$\lim_{x\to 4}\sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x\to 4} x} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2+2x-3\right) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 2x - \lim_{x\to 2} 3$$

$$= \left[\lim_{x\to 2} x\right]^2 + 2\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 3$$

$$= 2^2 + 2.2 - 3$$

7 $$= 4+4-3 = 5$$

8. $$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt[3]{x^2+2}+1} = \frac{\lim_{x\to 5}\left(\sqrt{x+4}-1\right)}{\lim_{x\to 5}\left(\sqrt[3]{x+2}+1\right)} = \frac{\lim_{x\to 5}\sqrt{x+4} - \lim_{x\to 5} 1}{\lim_{x\to 5}\sqrt[3]{x^2+2} + \lim_{x\to 5} 1} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4} - \lim_{x\to 5} 1}{\sqrt[3]{\lim_{x\to 5} x^2 + \lim_{x\to 5} 2} + \lim_{x\to 5} 1}$$

$$= \frac{\sqrt{5+4}-1}{\sqrt[3]{25+2}+1} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

9. $$\lim_{x\to 2} x^2 = \left[\lim_{x\to 2} x\right]^2 = 2^2 = 4$$

Nota: Si observamos los ejercicios resueltos nos podemos dar cuenta que basta evaluar la función en el valor al que tiende x.

Pero la evaluación directa no siempre funciona, así por ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}$$

y esto es una operación no definida por lo que a continuación exponemos la siguiente recomendación para calcular límites.

2.6. Cálculo de límites

En el cálculo de límites vamos a tener: límites determinados e indeterminados

Límite determinado o definido es aquel que se obtiene al evaluar la función en el valor hacia el que x tiende el valor del límite. En caso contrario se dice que es indeterminado.

Existen varias formas indeterminadas, entre las que tenemos:

$$\frac{c}{0};\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};\infty-\infty;0.\infty;0^0;\infty^0;1^\infty$$

Cuando al intentar un límite se obtiene una forma indeterminada debemos utilizar un artificio que nos permita "salvar o levantar" la indeterminación.

2.7. Calculo de límites algebraicos

1) Cuando la variable x solo se encuentra en numeradores. - Evaluar la función en el valor al que tiende x con lo que obtendrá A. Esto es: $\lim_{x\to a} f(x)=A$

Nota: No se debe sacar como conclusión que $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ de la teoría sabemos que la variable "x" nunca llega a ser igual a "a"

Ejercicios resueltos

1. $\lim_{x\to 2}(5x)=5(2)=10$
2. $\lim_{x\to 2}(2x+3)=2(2)+3=7$
3. $\lim_{x\to 2}(x^2-4x+1)=(2)^2-4(2)+1=-3$
4. $\lim_{x\to 3}(h^2-4h+1)=h^2-4h+1$
5. $\lim_{x\to 4}(4x^3+2x^2-6x+7)=256+32-24+7=271$
6. $\lim_{x\to 4}=\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$
7. $\lim_{x\to 2}=\left[5\sqrt{x^3-3x+4}\right]=5\sqrt{8-6+4}=5\sqrt{6}$

2) Cuando la variable se encuentra en numeradores y denominadores.- reemplazar "*a*" por "*x*". Puede ocurrir que este valor evaluado será definido o no definido.

En $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ al reemplazar "*a*" por "*x*" puede ocurrir que:

2.1) $f(a) \neq 0 \quad g(a) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ **valor definido**

Ejercicios resueltos

1. $\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+2} = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5}$

2. $\lim_{x \to 1} \frac{3x+4}{x^2+1} = \frac{3(1)+4}{(1)^2+1} = \frac{7}{2}$

3. $\lim_{x \to -1} \frac{3x-2}{4x^2-5x+1} = \frac{3(1)-2}{4(1)^2-5(1)+1} = \frac{-5}{4+5+1} = -\frac{1}{2}$

2.2) $f(a) = 0 \quad g(a) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{g(a)} = 0$ **valor definido**

Ejercicios:

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2+4} = \frac{(2)^2-4}{(2)^2+4} = \frac{4-4}{4+4} = \frac{0}{8} = 0$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \frac{(2)^2-5(2)+6}{(2)^2} = \frac{4-10+6}{4-9} = \frac{0}{-5} = 0$

2.

2.3) $f(a) = 0 \wedge g(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ **operación no definida o indeterminada**

- Para levantar la indeterminación, simplificar el factor (x-a). Este es factor de f(x) ^ g(x).

- Si f(x) y/o g(x) son funciones con radicales de dos o más términos, para simplificar el factor (x-a) que produce la indeterminación, primero racionalizar los radicales.

Ejercicios:

1. $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \frac{0}{0}$ para levantar la indeterminación, tenemos que simplificar el factor (x-*3)*

$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} = 9+9+9 = 27$

2. $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(x+3)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}$

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+5x-6}{x^2+2x-3} = \frac{0}{0}$

3. $\lim_{x \to 1} \frac{(x+6)(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+6}{x+3} = \frac{7}{4}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\frac{0}{0}$$

4. $$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{x+3}=\frac{9+9+9}{6}=\frac{21}{6}=\frac{9}{2}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}=\frac{0}{0}$$

5. $$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{x-2}=\frac{4+4+4}{-2-2}=\frac{12}{-4}=-3$$

$$\lim_{s\to a}\frac{s^4-a^4}{s^2-a^2}=\frac{0}{0}$$

6. $$\lim_{s\to a}\frac{s^4-a^4}{s^2-a^2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{s\to a}\frac{(s^2+a^2)(s^2-a^2)}{(s^2-a^2)}=2a^2$$

7. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-19x+30}{x-2}=\frac{0}{0}$$

x^3	x^2	x^1	x^0	
1	0	-19	30	2
	2	4	-30	
1	2	-15	0	

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x-15)}{(x-2)}=-7$$

8. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^3+6x-6}{x^3-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3(x-1)+6(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+6)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{7}{3}$$

9. $$\lim_{x\to 5}\frac{2x^3-11x^2+16x+105}{2x^2-17x+35}=\frac{0}{0}$$

x^3	x^2	x^1	x^0	
2	-11	-16	105	5
	10	-5	-105	
2	-1	-21	0	

$$2x^2-17x+35=\frac{(2x-10)(2x-7)}{2}=\frac{2(x-5)(2x-7)}{2}=(x-5)(2x-7)$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x^3-11x^2+16x+105}{(x-5)(2x-7)}=\lim_{x\to 5}\frac{50-5-21}{10-7}=\frac{24}{3}=8$$

10. $\lim_{x\to -3}\frac{x^3-7x+6}{x^4+x^3-10x^2-4x+24}=\frac{0}{0}$

x^3	x^2	x^1	x^0	
1	0	-7	6	-3
	-3	9	-6	
1	-3	2	0	

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
1	1	-10	-4	24	-3
	-3	6	12	-24	
1	-2	-4	8	0	

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2-3x+6)}{(x+3)(x^3-2x^2-4x+3)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2-4x+8}=\frac{9+9+2}{-27-18+12+8}=\frac{20}{-25}=-\frac{4}{5}$$

11. $\lim_{h\to -0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{h\to -0}\frac{(x+h-x)(x+h+x)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to -0}(2x+h)=2x$$

12. $\lim_{h\to -0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{0}\left(\frac{1}{210}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{0}(0)=\frac{0}{0}$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{2-2-x}{2(2+x)}\right)\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{-x}{2(2+x)}\right)\right]=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+x)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{4+2x}=-\frac{1}{4}$$

13. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\frac{1}{0}-\frac{2}{0}$? $\infty-\infty$ $\to *$ llevar a la forma $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{(1+x)(1-x)}\right)= \qquad \lim_{x\to 1}\frac{1+x-2^{\,0}}{(1+x)(1-x)_0}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-1-x}{(1+x)(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)}{(1+x)(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+x}=\frac{-1}{2}$$

13. $$\lim_{x\to 0}\frac{a_0x^4+a_1x^{n-1}+\dots+a_n}{b_0x^4+b_1x^{n-1}+\dots+b_n}=\frac{a_n}{b_n}$$

14. $$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\qquad \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$ ó también

$$\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

15. $$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}=\frac{4-4}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\bullet\frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(4-x^2\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{9-x^2-5}=\qquad \lim_{x\to 2}\frac{\left(4-x^2\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{4-x^2}=$$

$$\lim_{x\to 2}\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)=3+\sqrt{4+5}=3+3=6$$

16. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\quad}-1}{\sqrt{1+\quad}+1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\sqrt{1+x}+1}\bullet$$

$$\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)}+1}{\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}+1}\bullet\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{1+x-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt{1+x+1}}=\frac{3}{2}$$

17. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{\sqrt{4+x-x^2}-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{4+x+x^2}-2\right)\bullet \qquad \frac{\sqrt{4+x+x^2}+2}{\sqrt{4+x+x^2}+2}\bullet$$

$$\frac{1}{\sqrt{4+x+x^2}-2}\bullet\frac{\sqrt{4+x+x^2}+2}{\sqrt{4+x+x^2}+2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4+x+x^2-4}{\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)}\bullet \qquad \frac{\sqrt{4+x+x^2}+2}{4+x-x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)}{x(1-x)\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)}{(1-x)\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)}$$

$$\frac{(1+0)\left(\sqrt{4+0-0}+2\right)}{(1-0)\left(\sqrt{4+0-0}+2\right)}=\frac{4}{4}=1$$

18. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[2]{x}-\sqrt{x}}{x-1}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{x^3}}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{x^3}}{x-1}\bullet$$

$$\frac{\left(\sqrt[6]{x^2}\right)^5+\left(\sqrt[6]{x^2}\right)^4\left(\sqrt[6]{x^3}\right)+\left(\sqrt[6]{x^2}\right)^3\left(\sqrt[6]{x^3}\right)^2+\left(\sqrt[6]{x^2}\right)^2\left(\sqrt[6]{x^3}\right)^3+\left(\sqrt[6]{x^2}\right)\left(\sqrt[6]{x^3}\right)^4+\left(\sqrt[6]{x^3}\right)^5}{E}=E$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{X^2-X^3}{(X-1)\bullet E}=\lim_{x\to 0}\frac{-X^2(X-1)}{(X-1)\bullet E}=\lim_{x\to 0}\frac{-X^2}{E}=$$

$$-\frac{1}{6}$$

19. Para la función $f\ (x)\ =x^2-3x$ hallar

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f x}{h}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-3(x+h)-\left(x^2-3x\right)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-2x-3h-x^2+3x}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h-3)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h-3)$$

$$=2x-3$$

20. Para la función *f (x)* = $\sqrt{3x+1}$, hallar

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3(x+h)+1}-\sqrt{3x+1}}{h}\bullet\frac{\sqrt{3(x+h)+1}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3(x+h)+1}+\sqrt{3x+1}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{[3(x+h)+1]-(3x+1)}{h(\sqrt{3(x+h)+1}+\sqrt{3x+1})}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{3x+3h+1-3x-1}{h(\sqrt{3(x+h)+1}+\sqrt{3x+1})}=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

21. Dada la función *f(x)*= $\sqrt[3]{5x+1}$ hallar

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{5(x+h)+1}-\sqrt[3]{5x+1}}{h}\bullet\frac{\sqrt[3]{[5(x+h)+1]^2}+\sqrt[3]{5x+1}+\sqrt[3]{(5x+1)^2}}{A}=A$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)+1-5x-1}{h\cdot A}=\lim_{h\to 0}\frac{5x+5h+1-5x-1}{h\cdot A}=\frac{5}{3\sqrt[3]{(5x+1)^2}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[4]{4(x+h)+1}-\sqrt[4]{4x+1}}{h}\cdot\frac{[\sqrt[4]{4(x+h)+1}]^3+[\sqrt[4]{4(x+h)+1}]^2(\sqrt[4]{4x+1}+[\sqrt[4]{4(x+h)+1}](\sqrt[4]{4x+1})^2+(\sqrt[4]{4x+1})}{B}=B$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)+1-(4x+1)}{h\cdot B}=\lim_{h\to 0}\frac{4x+4h+1-4x-1}{h\cdot A}=\frac{4}{4\left(\sqrt[4]{4x+1}\right)^3}=\frac{1}{(4x+1)^{3/4}}$$

22. Dada la función *f(x)*= $\sqrt[5]{2x}$ hallar

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[5]{2(x+h)}-\sqrt[5]{2x}}{h}\cdot\frac{(\sqrt[5]{2(x+h)})^4+(\sqrt[5]{2(x+h)})^3(\sqrt[5]{2x})+(\sqrt[5]{2(x+h)})^2(\sqrt[5]{2x})^2+(\sqrt[5]{2(x+h)})(\sqrt[5]{2x})^3+(\sqrt[5]{2x})^4}{C}=C$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)-2x}{h\cdot C}=\lim_{h\to 0}\frac{2x+2h-2x}{h\cdot C}=\frac{2}{5\left(\sqrt[5]{2x}\right)^4}=\frac{1}{5(2x)^{4/5}}$$

23. Dada la función *f(x)*= $\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}$ hallar

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{0}{0}$$

Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ entonces

a. $$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}\cdot\frac{(\sqrt[3]{x+h})^2+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}{D}=D$$

$$\lim_{h\quad 0}\frac{x+h-x}{h\ \ D}=\frac{1}{3x^{2/3}}$$

b. $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3x^{2/3}} - \frac{1}{2x^{1/2}}$$

2.4)

El símbolo ∞ se utiliza para *indicar que el*

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ "NO EXISTE" ∃ $f(a) \neq 0 \wedge g(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{0} = \pm\infty$ ∃

La función se vuelve una indeterminación.

se quiera al escoger un "x" muy cercano a "*a*" para saber si es

$+\infty \vee -\infty$ calcular $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} \vee \lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)}$ tomando en cuenta el factor $(x-a)$ que está produciendo la indeterminación.

Propiedades:

1. $\lim_{x\to a^{\pm}} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ Si $n \in Z^+$ par

2. $\lim_{x\to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \wedge \lim_{x\to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$ Si $n \in Z^+$ impar

Además: Si $k \in \Re$

Si $k > 0 \Rightarrow k(\pm\infty) = \pm\infty$

Si $k < 0 \Rightarrow k(\pm\infty) = \mp\infty$

$$\text{Si } k \in \Re \Rightarrow \begin{cases} k \pm \infty = \pm\infty \\ \frac{k}{\pm\infty} = 0 \end{cases}$$

$(+\infty)^n = +\infty$ Si $n \in Z^+$

$\sqrt[n]{+\infty} = +\infty$ Si $n \in Z^+$

$$(-\infty)^n = \left.\begin{array}{ll} +\infty & \text{Si } n \in Z^+ \text{ par} \\ -\infty & \text{Si } n \in Z^+ \text{ impar} \end{array}\right\}$$

$\sqrt[n]{-\infty} = -\infty$ Si $n \in Z^+$ impar

Nota: Si la función se vuelve una indeterminación cuando $x \to a$ en qué punto tenemos la asíntota vertical.

Ejercicios:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0}$ operación no definida

Para saber qué es lo que sucede con esta función a izquierda y derecha del cero calculamos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

es decir que cuando: $x \to 0^- \Rightarrow f(x) \to \infty \quad \wedge$

2. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{0}$ operación no definida

Analicemos que está sucediendo con f(x) cuando $x \to 1$ por la izquierda y por la derecha

$$\lim_{x\to1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty \wedge \lim_{x\to1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

3. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{2}{(x-3)^2} = \dfrac{2}{0}$

$$\lim_{x\to3^-} \frac{2}{(x-3)^2} = +\infty \wedge \lim_{x\to3^+} \frac{2}{(x-3)^2} = +\infty$$

4. $\lim\limits_{x\to4^+} \dfrac{5}{(x-4)^2} = -\infty$

5. $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{3}{(x-2)^2} = +\infty$

6. $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{3x}{(x-2)^2} = \dfrac{6}{0}$ indeterminado

$$\lim_{x\to2^+} \frac{3x}{(x-2)^2} = \lim_{x\to2^+} 3x \cdot \lim_{x\to2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = 6 \cdot \infty = \infty$$

7. $\lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{x+2}{x^2-9} = \dfrac{-1.0001}{0.0006} = -\infty$ indeterminado

Ó

$$\lim_{x\to-3^+} \frac{x+2}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x\to-3^+} \frac{x+2}{x-3} \cdot \lim_{x\to-3^+} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6} \cdot (-\infty) = -\infty$$

8. $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0}$

$$\lim_{x\to2^-} (x+2) \lim_{x\to2^-} \frac{1}{x-2} = 4(-\infty) = -\infty$$

9. $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{1}{0}$

$$\lim_{x\to1^-} (2x). \lim_{x\to1^-} \frac{1}{x^2-1} = 2(-\infty) = -\infty$$

10. $\lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{x^3-9}{x+3} = \dfrac{-27-9}{0} = \dfrac{-36}{0}$

$$\lim_{x\to-3^-} (x^3-9) \lim_{x\to-3^-} \frac{1}{x+3} = -36(\infty) = -\infty$$

11. $\lim\limits_{x\to5^+} \dfrac{x-6}{x^2-5x} = \dfrac{-1}{0} =$

$$\lim_{x\to5^+} \frac{(x-6)}{x(x-5)} = \lim_{x\to5^+} \frac{x-6}{x} \lim_{x\to5^+} \frac{1}{x-5} = -\frac{-1}{5} \infty = -\infty$$

12. $\lim\limits_{x\to-1^+} \left[\dfrac{3}{(x+1)^2} + 5x\right] = \dfrac{3}{0} - 5$

$$\lim_{x\to-1^+} 5x + 3 \lim_{x\to-1^+} \frac{1}{(x+1)^2} - 5 + 3(\infty) = \infty$$

13. $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to1^+} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0}$$

$$\lim_{x\to1^+} (x+2). \lim_{x\to1^+} \frac{1}{x-1} = 3.\infty = \infty$$

14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x+3}}{x-2} = \dfrac{\sqrt{7}}{0}$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2x+3}}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{2x+3}\, .\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = \sqrt{7}(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{2x+3}}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \sqrt{2x+3}\, .\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \sqrt{7}(-\infty) = -\infty$$

15. $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}} = \sqrt{\dfrac{6}{0}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{0}} = \dfrac{\sqrt{6}}{0}$

$$\sqrt{\lim_{x\to 3^+} \frac{x+3}{x-3}} = \sqrt{\lim_{x\to 3^+} (x+3) \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}} = \sqrt{6}\,\sqrt{\infty} = \infty$$

$$\sqrt{\lim_{x\to 3^-} \frac{x+3}{x-3}} = \sqrt{\lim_{x\to 3^-} (x+3)}\,\sqrt{\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3}} = \sqrt{6}\,\exists \Rightarrow \exists$$

2.8. Actividades de aprendizaje

- Para un correcto aprendizaje de esta unidad se debe realizar una lectura cuidadosa de la totalidad de su contenido.

- Al final de cada sección, se plantea un grupo de ejercicios para que usted resuelva inmediatamente después del estudio del tema correspondiente, por lo que es muy importante haber comprendido el desarrollo de los mismos en la parte de ejercicios resueltos.

- Para su auto evaluación se sugiere que se ejercite volviendo a resolver los ejercicios desarrollados en clase aplicando los artificios anotados, pase a resolver los ejercicios propuestos y para su seguridad se incluyen las respuestas a los mismos.

- Para la evaluación escrita usted puede utilizar, el formulario antes mencionado.

- Para poder avanzar en el estudio del siguiente tema (Derivada), usted debe estar seguro de que tiene un conocimiento sólido de este tema.

2.9. Actividad de auto evaluación

- La resolución de los ejercicios propuestos se la debe hacer paso a paso, sin mirar el texto, pudiendo utilizar el formulario, una vez finalizado el ejercicio compare el resultado obtenido con el del texto, si no coincide repita el ejercicio.

- En la resolución de los ejercicios propuestos tome en cuenta lo anotado anteriormente.

- Resolver los siguientes ejercicios propuestos.

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2-9} = \dfrac{27}{6}$

2. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = 2x$

3. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x^3+8)}{x^2-4} = -3$

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{-x}{4x+2x^2} = -\dfrac{1}{4}$

5. $\lim_{x\to 5} \dfrac{2x^3-11x^2-16x+105}{2x^2-17x+35} = 8$

6. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^3-7x+6}{x^4+x^3-10x^2-4x+24} = -\dfrac{4}{5}$

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{\sqrt{4+x-x^2}-2} = 1$

8. $f(x)=\sqrt[4]{4x+1}$ hallar $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{0}{0}$

$$\text{sol} = \frac{1}{\sqrt[4]{(4x+1)^3}}$$

2.10. Límites al infinito – límites especiales. –

Hasta aquí hemos estudiado que es lo que pasa con f(x) cuando x se aproxima a un valor determinado "a". Ahora nos preguntamos qué pasa con f(x) cuando x crece ilimitadamente (sin cota) o cuando crece sin cota es decir $x \to \pm\infty$

Propiedades

1. $\lim_{x\to\pm\infty} k = k$
2. $\lim_{x\to\pm\infty} x^n = +\infty$ $\quad n \in Z^+$ par
3. $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ $\quad n \in Z^+$ impar
4. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ $\quad n \in Z^+$ par
5. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$ $\quad n \in Z^+$ impar
6. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{k}{x^n} = 0$ $\quad n \in Q^+ \wedge k \in R \quad x^n \in R$

2.11. Cálculo de límites al infinito en funciones algebraicas

Para resolver límites al infinito de funciones algebraicas, escoja el término que tiene mayor grado, saque como factor común la variable con ese grado, y aplique las propiedades.

El límite calculado puede ser finito o infinito.

- Cuando la variable $x \to \pm\infty$, no evaluar directamente, aplique la recomendación y luego las propiedades.

Ejercicios resueltos

1. $\lim_{x\to+\infty} (3x^2+5X-1) = \lim_{x\to+\infty} \left[x^2\left(3+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\right] = +\infty$ infinito o indeterminado

   No existe límite

2. $\lim_{x\to+\infty} (2+x-5x^2) = \lim_{x\to+\infty} \left[x^2\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\right] = -\infty$

3. $\lim_{x\to+\infty} (2x^2-3x+7) = \lim_{x\to+\infty} \left[x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\right] = +\infty$

4. $\lim_{x\to+\infty} (2-4x-3x^2) = \lim_{x\to+\infty} \left[x^2\left(\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x}-3\right)\right] = -\infty$

5. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2-5x+1} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} x^2\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = +\infty$

6. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x-2}{4x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(4-\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{4x} = 0$ finito o deter.

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+2x+1}{3x^2-2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(6+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}=\frac{6}{3}=2$

8. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{9x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{x\left(9-\frac{7}{x}\right)}=\frac{1}{3}$

9. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=+\infty$

10. $\lim_{x\to\infty}\frac{4-8x-2x^3}{3x^2-7x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{4}{x^3}-\frac{8}{x^2}-2\right)}{x^2\left(3+\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}=-\infty$

11. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-x+1}{x^3+6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{6}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

12. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+4}{5x-x^2-7x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x}-7\right)}=-\frac{3}{7}$

13. $\lim_{h\to\infty}\frac{3h+2xh^2+x^3h^3}{5x-x^2-7x^3}=\lim_{h\to\infty}\frac{\frac{3h}{h^3}+\frac{2xh^2}{h^3}+\frac{x^3h^3}{h^3}}{\frac{4}{h^3}-\frac{3xh}{h^3}-\frac{2x^3h^3}{h^3}}=\lim_{h\to\infty}\frac{\frac{3}{h^2}+\frac{2x}{h}+x^3}{\frac{4}{h^3}-\frac{3x}{h^2}-2x^3}=\frac{x^3}{2x^3}=-\frac{1}{2x}$

14. $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2x-\frac{3}{x}\right)x\left(3+\frac{5}{x}\right)x\left(4-\frac{6}{x}\right)}{x^3\left(3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{2.3.4}{3}=8$

15. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{10}{x^3}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=1$

16. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}\left(x+\sqrt{x}\right)}}}=$

$\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{3/2}}}}}=1$

17. $\lim_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}\right)=\infty-\infty$

$\lim_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)\frac{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1-x^3}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$

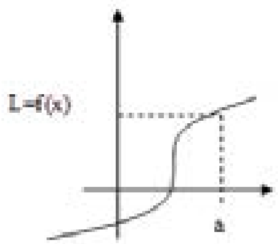
$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-\sqrt[3]{x^3-x^6}+\sqrt[3]{1-2x^3+x^6}}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}-\frac{2}{x^3}+1}}=\frac{0}{1+1+1}=\frac{0}{3}=0$

2.12. Continuidad

Intuitivamente denominamos como función continúa a la cueva que puede ser dibujada “sin levantar el lápiz del papel”

Así por ejemplo es una función continúa



En esta grafica se puede observar por el punto x = a

1 lim f(x)

x →a

2 f(a)

3 lim f(x) = f(a)

Mientras que las gráficas que se indican a continuación presentan tipos de discontinuación

En el punto x = a

1 lim f(x)

x →a

2 f(a)

3 Hay una ruptura leve, solo se interrumpe en un punto

2 f(a)

3 lim f(x) = f(a)

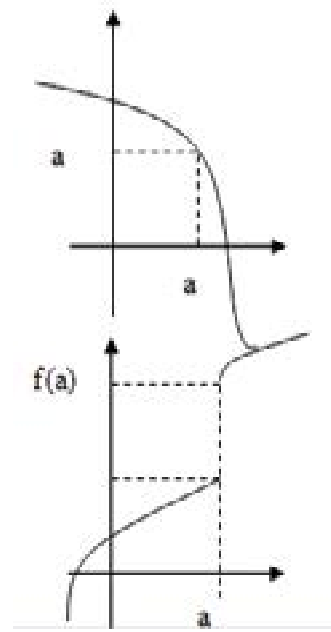
x →a

En x = a

1 lim f(x)	lim f(x)	lim f(x)
x →a	x →a-	x →a+

2 f(a)

3 Tenemos un salto que en un lugar a otro



CAPÍTULO III

LA DERIVADA

3.1. Presentación

En esta parte del módulo, aprenderemos como derivar, en términos geométricos esto equivale a encontrar la pendiente de una curva o su razón de cambio.

Analizamos sistemáticamente las técnicas para hacer esto y la manera como se aplican a las funciones: algebraicas y trascendentes.

El desarrollo de esta unidad lo hacemos en dos secciones: la sección uno en la que se estudia el cálculo de derivadas aplicando la definición, y la sección dos destinada al estudio de la derivada con la aplicación de fórmulas, las mismas que se dan directamente sin entrar a su demostración formal.

3.2. Objetivos

- Calcular derivadas de funciones algebraicas aplicando la definición.

- Calcular derivadas aplicando las fórmulas.

3.3. Orientación metodológica

El estudio de este capítulo lo debe realizar por secciones. Una primera sección destinada a calcular la derivada por la definición, esto en funciones. Luego que se haya logrado una buena compresión del tema, pasar a la segunda sección, la misma que para su estudio se debe dividir en subsecciones, a saber: cálculo de la derivada aplicando fórmulas en funciones algebraicas, cálculo de derivadas sucesivas. Cálculo de derivada en funciones trascendentes aplicando las fórmulas, derivada de funciones implícitas, derivada de funciones inversas, derivada de función de función, derivada de funciones paramétricas.

Para que luego que se haya logrado una buena compresión de estos temas, tratar la interpretación geométrica de la derivada.

Por cada tema estudiado se recomienda hacer un formulario, para que lo puedan utilizar en la resolución de los ejercicios propuestos.

3.4. Contenido de la derivada

El Cálculo Diferencial nos ayuda a investigar cómo varía el valor de una función, al variar la variable independiente, y por lo tanto vamos a establecer una medida de esta variación.

3.5. Incremento

No es sino un aumento o disminución tanto en x como en y, y se lo representa por Δx y Δy. El valor del incremento de una variable que pasa de un valor numérico a otro se obtiene restando el valor inicial del valor final.

Esto es:

$$\Delta x = xf - xi$$
$$\Delta y = yf - yi$$

Donde Δx es el incremento de la variable independiente en una función, y Δy es el incremento de la función.

Es evidente por lo tanto que este incremento puede ser positivo o negativo según la variable aumente o disminuya de valor.

Si en $y = f(x)$ la variable independiente x toma un incremento Δx, entonces Δy indicará el incremento correspondiente de

la función $f(x)$ (p sea de la variable dependiente y).

Esto es si:

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

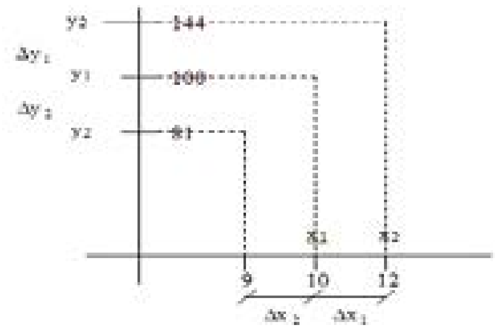
Ahora supongamos que x aumente a 12 es decir ,x=12 entonces $\Delta x_1 = 12 - 10$; $\Delta x_1 = 2$, por lo tanto y aumenta hasta que $y = 144$, por lo que $\Delta y_1 = 144 - 100$ por lo que $\Delta y_1 = 44$.

Si suponemos que x decrece tendremos que si

$x = 9;\ y = 81,\ \Delta x_2 = -1;\ \Delta y_2 = -19$

En el ejemplo podemos ver qué y aumenta cuando x aumenta, y y decrece cuando x decrece. Los valores correspondientes Δx y Δy tiene un mismo signo.

En otro tipo de funciones podría acontecer que y decrezca cuando x aumenta o viceversa por lo que Δ y Δy tendrán entonces signos contrarios.



3.6. Definición de derivada

La derivada de una función $y = f(x)$, es el límite de la relación de incrementos entre la variable dependiente Δy y la variable independiente Δx cuando $\Delta x \to 0$ esto es: $\lim\limits_{\Delta x \quad 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta x}$$

Notación de derivada.- se lo representa de la siguiente manera

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{d}{dx}(y) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Dxf(x) = y' = f^1(x)$$

La más usada es

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ y se lee "la derivada de y (o de f(x)) con respecto a x"

3.7. Cálculo de la derivada

En el cálculo de la derivada vamos a utilizar dos procedimientos.

1. Cálculo de la derivada por regla general (regla de los cinco pasos) y por la definición.

2. Cálculo de la derivada por medio de fórmulas.

3.8. Cálculo de la derivada por la regla general

Paso 1. Consideramos primero la función $y = f(x)$

Paso 2. Si a x se le da un incremento Δx, por lo tanto estaremos incrementando y

y tendremos un Δy, es decir que: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

Paso 3. Para hallar el incremento Δy de la función, restaremos el paso 2 del paso 1.

$$\begin{array}{l} y + \Delta y = f(x + \Delta x) \\ \underline{-y \qquad = -f(x) \qquad\qquad} \\ \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \end{array}$$

Paso 4. Dividiendo los dos miembros de esta igualdad por Δx es decir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Paso 5. Llevando al límite cuando $\Delta x \to 0$ la última igualdad tenemos.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y'$$

Esta última expresión define la derivada de y (o de f(x)) con respecto a x. La operación de hallar la derivada de una función se llama derivación.

Ejercicios resueltos

Calcule la derivada de las siguientes funciones aplicando la regla general

1. $y = k$
2. $f(x) = x$
3. $\frac{d}{dx}(ax + b)$
4. $f(x) = x^n$
5. $f(x) = 3x^2 - 5$

(1) $y = 3x^2 - 5$

(2) $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)$

(3) $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)$

$$\begin{array}{l} -y = -3x^2 + 5 \\ \hline \Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 5 - 3x^2 - 5 \end{array}$$

$$\Delta y = 6x\Delta x + 3\Delta x^2$$

$$\Delta y = \Delta x(6x + 3\Delta x)$$

(4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = (6x + 3\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta x}$

(5) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x)$

$$y' = 6x$$

6. $f(x) = 4x^2 - 3x + 8 \quad f'(x) = ?$

(1) $y = 4x^2 - 3x + 8$

(2) $y + \Delta y = 4(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 8$

(3) $y + \Delta y = 4(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 8$

$$\begin{array}{l} -y = -4x^2 + 3x - 8 \\ \hline \Delta y = 4x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 3x - 3\Delta x + 8 - 4x^2 + 3x - 8 \end{array}$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x$$

$$\Delta y = \Delta x(2x + \Delta x - 3)$$

(4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = (2x + \Delta x + 3)\frac{\Delta x}{\Delta x}$

(5) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 3)$

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x + 3$$

7. $f(x) = \frac{x - 2}{2x + 1} \qquad f'(x) = ?$

(1) $y = \frac{x - 2}{2x + 1}$

(2) $y + \Delta y = \frac{(x + \Delta x) - 2}{2(x + \Delta x) + 1}$

(3) $y + \Delta y = \frac{(x + \Delta x) - 2}{2(x + \Delta x) + 1}$

$$\begin{array}{l} -y = -\left(\frac{x - 2}{2x + 1}\right) \\ \hline \Delta y = \frac{(x + \Delta x) - 2}{2(x + \Delta x) + 1} - \left(\frac{x - 2}{2x + 1}\right) \end{array}$$

$$\Delta y = \frac{(2x + 1)[(x + \Delta x) - 2] - (x - 2)(2x + 2\Delta x + 1)}{[2(x + \Delta x) + 1](2x + 1)}$$

$$\Delta y = \frac{2x^2 + 2x\Delta x - 4x + x + \Delta x - 2 - 2x^2 - 2x\Delta x - x + 4x + 4\Delta x + 2)}{(2x + 2\Delta x + 1)(2x + 1)}$$

$$\Delta y = \frac{5\Delta x}{(2x + 2\Delta x + 1)(2x + 1)}$$

(4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{(2x + 2\Delta x + 1)(2x + 1)}$

(5) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5}{(2x + 2\Delta x + 1)(2x + 1)}$

$$f'(x) = \frac{5}{(2x + 1)^2}$$

8. $f(x)=\sqrt{3x-2} \qquad f'(x)=?$

(1) $y=\sqrt{3x-2}$

(2) $y+\Delta y=\sqrt{3(x+\Delta x)-2}$

(3) $y+\Delta y=\sqrt{3(x+\Delta x)-2}$

$$\begin{array}{r} -y=-\sqrt{3x-2} \\ \hline \Delta y=\sqrt{3(x+\Delta x)-2}-\sqrt{3x-2} \\ \Delta y=(\sqrt{3(x+\Delta x)-2}-\sqrt{3x-2}) \end{array}$$

(4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{3(x+\Delta x)-2}-\sqrt{3x-2}}{\Delta X}$

(5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{3(x+\Delta x)-2}-\sqrt{3x-2}}{\Delta x}=\dfrac{0}{0}$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-2}-\sqrt{3x-2}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-2}+\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3(x+\Delta x)-2}+\sqrt{3x-2}}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-2}-\sqrt{3x-2}}{\Delta x(\sqrt{3(x+\Delta x)-2}+\sqrt{3x-2})}$$

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{(3x-2)}}$$

Calcule la derivada de las siguientes funciones utilizando la definición.

1. $f(x)=\sqrt[3]{4x-3}$
2. $\dfrac{d}{dx}\sqrt[3]{3x-7}$
3. $f(x)=\sqrt{2x}+\sqrt[3]{3x}$
4. $f(x)=\operatorname{sen}x$
5. $f(x)=\ln x$
6. $f(x)=ax$
7. $f(x)=x\operatorname{sen}x$

3.9. Actividades de aprendizaje

- Para un correcto aprendizaje de este tema se debe realizar una lectura cuidados en su totalidad, y se le recomienda volver hacer los ejercicios resueltos, entendiendo como aplica la definición.

- Al final del tema, se plantean un grupo de ejercicios que usted resolverá inmediatamente. Por lo que es muy importante haber comprendido el desarrollo de los mismos en la parte de ejercicios resueltos.

- Hacer un formulario en el que consten los pasos a seguir para la resolución de los ejercicios, este formulario le servirá posteriormente para su evaluación escrita.

3.10. Actividad de auto evaluación.

- La resolución de los ejercicios propuestos se la debe hacer paso a paso, no mirar el texto, pero pudiendo utilizar el formulario. Una vez finalizado el ejercicio compare el resultado obtenido con el del texto, sino coinciden, repita el ejercicio.

- Resolver los siguientes ejercicios propuestos:

1. Si: $y=x^3-5x^2-7$ calcular y' aplicando la regla general

$SOL: y'=3x^2-10x$

1. Si $y=\dfrac{x^3+1}{x}$ calcular y' aplicando la regla de los 5 pasos

$$SOL: y' = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$$

2. Hallar $\frac{d}{dx}\sqrt[4]{3x^2 - 5}$ aplicando la definición $y' = ?$

$$SOL: y' = \frac{6x}{4\sqrt[4]{(3x^3 - 9)^3}}$$

3. Hallar $\frac{d}{dx}\sqrt[4]{3x^2 - 5}$ aplicando la definición $y' = ?$

$$SOL: y' = \frac{6x}{4\sqrt[4]{(3x^3 - 9)^3}}$$

4. $f(x) = \sqrt[3]{4x - 2}$ calcular $f'(x)$ aplicando la definición $\frac{dx}{dy} = ?$

$$SOL: \frac{dx}{dy} = \frac{4}{3\sqrt[3]{(4x - 2)^2}}$$

5. Si: $y = \sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}$ hallar y' aplicar la definición

$$SOL: y' = \frac{1/3}{3\sqrt[3]{\left[1 - \frac{x}{3}\right]^2}} + \frac{1/4}{4\sqrt[4]{\left[1 + \frac{x}{3}\right]^3}}$$

6. Si: $y = \sqrt{4x^2 - 5x + 2} + \sqrt[4]{4x^2 - 5x + 2}$ hallar $y'(x)$ aplicar la definición.

$$SOL: y' = \frac{8x - 5}{2\sqrt{4x^2 - 5x + 2}} + \frac{8x - 5}{\sqrt[4]{(4x^2 - 5x + 2)^3}}$$

3.11. Fórmulas para derivar funciones.

3.11.1. Objetivos

- Aplicar las fórmulas para hallar derivada de funciones polinómicas o algebraicas y trascendentales.

- Plantear adecuadamente la regla de derivada en cadena.

- Calcular derivadas de orden superior.

3.12. Orientación metodológica

Al estudiar este tema, se trata de relacionar el conocimiento nuevo con el conocimiento que usted ya posee, estos contenidos introductorios se refieren a varias definiciones preliminares, las mismas que le permitirán adquirir los conocimientos necesarios antes de iniciar con el nuevo conocimiento, capaz de que comprenda y aprenda en una forma secuencial. Para que de esta manera el tema estudiado quede bien cimentado.

3.13. Contenido de formulas para derivar funciones

El procedimiento de aplicar la regla general o la definición para la derivación puede resultarse largo y muchas veces complicado y por consiguiente se han deducido de la regla general, con el fin de facilitarnos la tarea, reglas o fórmulas especiales para derivar ciertas formas que se presentan con frecuencia.

A continuación enunciemos algunas de las reglas:

1 . La derivada de una constante k es igual a 0

$y = k \qquad\qquad y' = 0$

2 . La derivada de una función con respecto así mismo es igual a 1.

$y = x \qquad\qquad y' = 1$

3.La derivada de la potencia de una función es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad, y por la derivada de la función.

$y = v^n \qquad\qquad y' = n\, v^{n-1} v'$ Regla de la Cadena

$y = x^n \qquad\qquad y' = n\, x^{n-1}$

4.La derivada de la suma o diferencia de funciones es igual a la suma o resta de los derivadas de cada una de las funciones.

$y = u+v-w \qquad\qquad y' = u'+v'-w'$

5.La derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

$y = k.v \qquad\qquad y' = k.v'$

6.La derivada de un producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda función más

primera función por la derivada de la segunda función.

$y = u.v \qquad\qquad y' = u'.v + u.v'$

7.La derivada de un cociente u/v es igual a la derivada del numerador por el denominador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el denominador elevado al cuadrado.

$$y = \frac{u}{v} \qquad\qquad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Ejercicios resueltos

Hallar la derivada de las siguientes funciones.

2.- $y = 3x \qquad y' = 3$

3.- $y = -4x \qquad y' = -4$

4.- $y = \sqrt{a} \cdot x \qquad y' = \sqrt{a}$

5.- $y = x^3 = \qquad y' = x^{3-1} \qquad y' = 3x^2$

6.- $y = x^8 = \qquad y' = 8x^{8-1} \qquad y' = 8x^7$

7.- $y = 3x^5 \qquad y' = 3.5x^{5-1} \qquad y' = 15x^4$

8.- $y = -4x^7 \qquad y' = 7.4x^{7-1} \qquad y' = -28x^6$

9.- $y = 3x^3 + x^2 - 7$ $\quad y' = 9x^2 + 2x - 0$ $\quad y' = 9x^2 - 2x$

10.- $y = 3x^4 - 2x^2 + 8$ $\quad y' = 12x^3 - 4x$

11.- $y = 3x - 5x^3$ $\quad y' = 3 - 15x^2$

12.- $y = mx^3 + mx^2 + b$ $\quad y' = 3mx^2 + 2mx$

13.- $y = 2t - t^2$ $\quad y' = 2 - 2t$

14.- $u(v) = 4v^2 - 2v^3$ $\quad u'(v) = 8v - 6v^2$

15.- $\frac{d}{dx}(ax^4 - bx^2) = 4ax^3 - 2bx$

16.- $f(t) = at^5 - 5bt =$ $\quad f'(t) = 5at^4 - 5b$

17.- $y = \frac{z^2}{2} - \frac{z^7}{7}$ $\quad y' = z - z^6$

18.- $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$ $\quad y' = \frac{2x^{-1/3}}{3}$

19.- $y(u) = \sqrt{u} = (u)^{1/2}$ $\quad y'(u) = \frac{1}{2u^{1/2}}$

20.- $y = \sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt{x}$ $\quad y = (x^{2/3}) - 4(x)^{1/2}$ $\quad y' = 2/3x^{-1/3} - x^{-1/2}$

21.- $y = x^{2/3} - a^{2/3}$ $\quad y'(x) = 2/3x^{-1/3}$

22.- $y = (x^2-3x+2)^7$ $\quad y' = 7(x^2-3x+2)^6.(2x-3)$

23 $y = (2-3t^2)^4$ $\quad y' = 4(2-3t^2)^3\,(-6t)$

24 $y = \sqrt{x^2+1}$ $\quad y = (x^2+1)^{1/2}$ $\quad y' = 1/2(x^2-1)^{-1/2}\,(2x)$

$y' = x(x^2+1)^{-1/2}$

25 $y = \sqrt[3]{4 - 9x - 6x^2}$ $\quad y = (4 - 9x - 6x^2)^{1/3}$

$y' = \frac{1}{3}\,(4 - 9x - 6x^2)^{-2/3}\,(-9-12x)$

26 $y = (3x^4-2x^2-8)^3$ $\quad y' = 3(3x^4-2x^2-8)^2\,(12x^3-4x)$

27 $y = (4-3x-2x^3)^7$ $\quad y' = 7(4-3x-2x^3)\,(3-6x^2)$

28 $y = \sqrt{x^2+1}$ $\quad y = (x+1)^{1/2}$

$y' = 1/2(x+1)^{-1/2}\,(2x)$

29 $y = \sqrt{a^2 - b^2x^2}$ $\quad y = (a^2 - b^2x^2)^{1/2}$ $\quad y' = 1/2(a^2 - b^2x^2)^{-1/2}\,(-2b^2x)$

30 $y = \sqrt[3]{4 - 9x^2 - 6x^3}$ $\quad y = (4 - 9x^2 - 6x^3)^{1/3}$ $\quad y' = 1/3(4 - 9x^2 - 6x^3)^{-2/3}\,(-18x - 18x^2)$

31 $y=x\sqrt{a+bx}$ $\quad y=\sqrt{ax^2+bx^3}$ $\quad y=(ax^2+bx^3)^{1/2}$

$$y'=\frac{1}{2}(ax^2+bx^3)^{-1/2}(2ax+3bx^2)$$

32. $y=\sqrt[4]{\sqrt[3]{(x^2-3x-2)}}$ $\quad y=\left[(x^2-3x-2)^{1/3}\right]^{1/4}$ $\quad y=(x^2-3x-2)^{1/12}$

$$y'=\frac{1}{12}(x^2-3x-2)^{-11/12}(2x-3)$$

33.- $y=\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3+3x^2-4}}}$ $\quad y=\left\{\left[(x^3+3x^2-4)^{1/4}\right]^{1/3}\right\}^{1/2}$

$y=(x^3+3x^2-4)^{1/24}$

$$y'=\frac{1}{24}(x^3+3x^2-4)^{-23/24}(3x^2+6x)$$

34.- $y=\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$ $\quad y=\frac{(x)^{1/2}}{2}-\frac{2}{(x)^{1/2}}$ $\quad y=(x)^{1/2}2^{-1}-2(x)^{-1/2}$

$$y'=\frac{1}{2}(x)^{-1/2}+(x)^{-3/2}$$

$$y'=\frac{1}{4(x)^{1/2}}+\frac{1}{x^{3/2}}$$

35.- $y=(x^3-5)^4(3x^2-7)^8$

$$y'=4(x^3-5)^3(3x^2)(3x^2-7)^8+8(3x^2-7)^7(6x)(x^3-5)^4$$

$$y'=12x^2(x^3-5)^3(3x^2-7)^8+48x(3x^2-7)^7(x^3-5)^4$$

36 $y=\sqrt{x^2-1}\,\sqrt[3]{x^2+1}$ $\quad y=(x^2-1)^{1/2}(x^2+1)^{1/3}$

$$y'=\frac{1}{2}(x^2-1)^{-1/2}(2x)(x^2+1)^{1/3}+\frac{1}{3}(x^2+1)^{-2/3}(2x)(x^2-1)^{1/2}$$

$$y'=x(x^2-1)^{-1/2}(x^2+1)^{1/3}+\frac{2x}{3}(x^2+1)^{-2/3}(x^2-1)^{1/2}$$

37 $y=\frac{x^2-5}{x^2-1}$ $\quad y=(x^2-5)(x^2-1)^{-1}$

$$y'=2x(x^2-1)^{-1}+(-1)(x^2-1)^{-2}(2x)(x^2-5)$$

$$y'=2x(x^2-1)^{-1}-2x(x^2-1)^{-2}(x^2-5)$$

Aplicando la fórmula de cociente

$$y'=\frac{2x(x^2-1)-(2x)(x^2-5)}{(x^2-1)^2}$$

38 $y=\frac{x^3+1}{x}$

$$y'=\frac{(3x^2)(x)-(x^3+1)}{x^2} \qquad y'=\frac{3x^3-x^3-1}{x^2} \qquad y'=\frac{2x^3-1}{x^2}$$

39 $$\frac{d}{dx}\left(a+\frac{b}{x^2}\right)^3=3\left(a+\frac{b}{x^2}\right)\left(\frac{-2xb}{x^4}\right)=3\left(a+\frac{b}{x^2}\right)^2\cdot\left(\frac{-2b}{x^3}\right)$$

40 $y=\frac{a-x}{a+x}$

$$y'=\frac{(-1)(a+x)-(x)(a-x)}{(a+x)^2} \qquad y'=\frac{-a-x-ax+x^2}{(a+x)^2}$$

41 $y=\frac{x^2}{4-x^2}$

$$y'=\frac{2x(4-x^2)-(-2x)(x^2)}{(4-x^2)^2} \qquad y'=\frac{8x-2x^3+2x^3}{(4-x^2)^2}$$

$$y'=\frac{8x}{(4-x^2)^2}$$

42 $y=\frac{x^2+5}{3x^3-4x}$

$$y'=\frac{(2x)(3x^3-4x)-(9x^2-4)(x^2+5)}{(3x^3-4x)^2}$$

$$y'=\frac{6x^4-8x^2-(9x^4+45x^2-4x^2-20)}{(3x^3-4x)^2}$$

$$y'=\frac{-3x^4-49x^2+20}{(3x^3-4x)^2}$$

43 $y=\left(a-\frac{b}{x}\right)^2 \qquad y=\left(\frac{ax-b}{x}\right)^2$

$$y'=2\left(\frac{ax-b}{x}\right)\frac{ax-ax+b}{x^2}$$

$$y'=2\left(\frac{ax-b}{x}\right)\frac{b}{x^2}$$

44 $y=\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad y=\frac{x^2}{(a^2-x^2)^{1/2}}$

$$y'=\frac{2x\,(a^2-x^2)^{1/2}-\frac{x^2}{2}(a^2-x^2)^{-1/2}(-2x)}{\left[(a^2-x^2)^{1/2}\right]^2}$$

$$y'=\frac{2x\,(a^2-x^2)^{1/2}+x^3\,(a^2-x^2)^{-1/2}}{a^2-x^2}$$

45 $y=\frac{a+bx+cx^2}{\sqrt{x}} \qquad y=\frac{a+bx+cx^2}{x^{1/2}}$

$$y'=\left((+b+2cx)x^{1/2}-\frac{1}{1/2}x^{-1/2}(a+bx+cx^2)\right)\Big/ x$$

46 $y=\sqrt{\frac{1-cx}{1+cx}} \qquad y=\left(\frac{1-cx}{1+cx}\right)^{1/2}$

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1-cx}{1+cx}\right)^{-1/2}\left[\frac{(-c)(1+cx)-(c)(1-cx)}{(1+cx)^2}\right]$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1-cx}{1+cx}\right)^{-1/2}\left(\frac{-c-c^2x-c+c^2x}{(1+cx)^2}\right)$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1-cx}{1+cx}\right)^{-1/2}\frac{-2c}{(1+cx)^2} \qquad y'=\left(\frac{1-cx}{1+cx}\right)^{-1/2}\frac{-c}{(1+cx)^2}$$

3.14. Actividades de aprendizaje

- Para un correcto aprendizaje de esta unidad se debe realizar una lectura cuidadosa de cada tema tratado en su totalidad, y se le recomienda volver hacer los ejercicios resueltos, entendiendo como y porque aplica determinada formula, y cómo funciona la regla de la cadena.

- Al final de cada tema, se plantean un grupo de ejercicios que usted resolverá inmediatamente después del tema correspondiente. Por lo que es muy importante haber comprendido el desarrollo de los mismos en la parte de ejercicios resueltos.

- Para la auto evaluación es recomendable que vuelva a ejercitarse repitiendo los ejercicios desarrollados, pase a resolver los ejercicios propuestos para su seguridad en la resolución se incluyen las respuestas a los mismos.

- Para la evaluación escrita usted puede utilizar el formulario.

3.15. Actividad de auto evaluación

- La resolución de los ejercicios propuestos se la debe hacer paso a paso, no mirar el texto, pero pudiendo utilizar el formulario.

Una vez finalizado el ejercicio compare el resultado obtenido con sus compañeros, sino coinciden, repita el ejercicio.

- Para la resolución de la tarea es recomendable que esté en condiciones de: primeramente, reconocer que tipo de función se está proponiendo derivar y cuál es la fórmula a utilizar. Además debe saber utilizar la regla de la cadena, y en la simplificación debe aplicar sus conocimientos de Álgebra.

-

1. $y = \dfrac{4x^3 - 3x^2 + 4}{x\sqrt{x^2 - 1}}$
2. $y = \sqrt[3]{3x^2 - \sqrt{7x-8} + \sqrt[3]{3x - 5x^2 + 7x^3}}$
3. $y = \sqrt[3]{3x^2 + 5\sqrt{5x - 3\sqrt{2x}}}$
4. $y = \left\{5x^2 + \left[54x^4 - (36450\,x^9)^{1/2}\right]^{1/3}\right\}^{1/4}$

3.16. Derivadas sucesivas de una función.

Hemos visto que, en general, la derivada de una función de x, es también una función de x. Puede ocurrir que esta nueva función sea también derivable, en este caso la derivada de la función primitiva se denomina primera derivada, la derivada de la primera derivada se llama segunda derivada de la función primitiva, la derivada de la segunda derivada se llama tercera derivada, y así, sucesivamente, hasta la enésima derivada.

Así por ejemplo:

Si $y = 5x^4$ Función Primitiva

	$\dfrac{dy}{dx} = 20x^3$	1^{era} derivada	y'
	$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 60x^2$	2da derivada	y''
Entonces:	$\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\right] = 120x$	3^{era} derivada	y'''
	$\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\right]\right\} = 120$	4ta derivada	y^{IV}
	$\dfrac{d}{dx}\left\langle\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\right]\right\}\right\rangle = 0$	5ta derivada	y^{V}

Los símbolos para las derivadas sucesivas se abrevian de la siguiente manera:

Pa $\dfrac{d}{dx} \quad y = \dfrac{dy}{dx} = f(x)' = y'(x) = y'$

F $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}y\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}f(x)\right) = \dfrac{d^2}{dx^2}y' = \left(\dfrac{d}{dx}\right)^2 y = \dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x)'' = y''$

Pa $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) = \dfrac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = y'''$

Par $\dfrac{d^ny}{dx^n}\ f^n(x) = y^n$ a

Siendo la notación más fácil de utilizar:

1[ra] derivada	y'
2[da] derivada	y''
3[ra] derivada	y'''
4[ta] derivada	y^{IV}
5[ta] derivada	y^{V}
En general	y^{n}

Ejercicios resueltos

C **1.** $y = 3x^4 - 2x^3 + 6x \qquad y''' = ?$

$y' = 12x^3 - 6x^2 + 6$

$y'' = 36x^2 - 12x$

$y''' = 72x - 12$

2. $y = \sqrt{a+bx} \qquad y''' = ?$

$y = (a+bx)^{1/2}$

$$y' = \frac{1}{2}(a+bx)^{-1/2}(b) = \frac{b}{2}(a+bx)^{-1/2}$$

$$y'' = \frac{b}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)(a+bx)^{-3/2}\, b = -\frac{b^2}{4}(a+bx)^{-3/2}$$

$$y''' = -\frac{b^2}{4}\left(\frac{-3}{2}\right)(a+bx)^{-5/2}(b) = \frac{3b^3}{8}(a+bx)^{-5/2}$$

3. $y = \dfrac{a-bx}{a+bx} \qquad y''' = ?$

$$y' = \frac{(-b)(a+bx)-(a-bx)(b)}{(a+bx)^2} = \frac{-ab-b^2x-ab+b^2x}{(a+bx)^2} = \frac{-2ab}{(a+bx)^2} \quad y' = (-2ab)(a+bx)^{-2}$$

$y'' = -2ab(-2)(a+bx)^{-3}(b) = 4ab^2(a+bx)^{-3}$

$y''' = -12ab^3(a+bx)^{-4}$

4. $y = \dfrac{x^2}{a+x} \qquad y^{IV} = ?$

$$y' = \frac{2x(a+x)-x^2}{(a+x)^2} = \frac{2ax+2x^2-x^2}{(a+x)^2} = \frac{2ax+x^2}{(a+x)^2}$$

$$y'' = \frac{\left[(2a+2x)(a+x)^2-(2ax+x^2)2(a+x)\right]}{(a+x)^4} = \frac{(a+x)\left[(2a+2x)(a+x)-(2ax+x^2)2\right]}{(a+x)^4}$$

$$y'' = \frac{2a^2+2ax+2ax+2x^2-4ax-2x^2}{(a+x)^3} = \frac{2a^2}{(a+x)^3} = 2a^2(a+x)^{-3}$$

$y''' = 2a^2(-3(a+x)^{-4}) = -6a^2(a+x)^{-4}$

$y^{IV} = 24a^2(a+x)^{-5}$

3.17. Actividad de auto evaluación

-En la resolución de las derivadas sucesivas es recomendable que el alumno esté en condiciones de reconocer qué tipo de funciones se está proponiendo derivar y cuál es la fórmula a utilizar. Además debe saber aplicar la regla de la cadena, y en la simplificación debe aplicar sus conocimientos de Álgebra, con estas condiciones podrá derivar las funciones propuestas en forma reiterativa

-La resolución de los ejercicios propuestos se la debe hacer paso a paso, no mirar el texto, pero pudiendo utilizar el formulario. Una vez finalizado el ejercicio compare el resultado obtenido con sus compañeros, sino coinciden, repita el ejercicio.

- Resolver los siguientes ejercicios:

1. $y = \sqrt[3]{x+\sqrt{x}} \qquad y'' = ?$

2. $y = \sqrt[4]{3x^2 - 5x\sqrt{2x}} \qquad y'' = ?$

3. $y = \sqrt[5]{3x^4 + 2x^3 - 5x\sqrt{x+2}} \qquad y'' = ?$

4. Si $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{1-x}$ probar que $f^{IV}(x) = \dfrac{-24}{(1-x)^5}$

3.18. Derivadas de las funciones trascendentes objetivos

- Aplicar las fórmulas para hallar la derivada de funciones trascendentes.

- Plantear adecuadamente la regla de derivación en cadena.

- Calcular derivadas de orden superior de una función dada.

- Plantear adecuadamente la derivación implícita y la regla de la cadena.

- Calcular derivadas inversas, función de función y paramétricas.

3.19. Orientación metodológica.

Con los conocimientos adquiridos anteriormente, se ha desarrollado la capacidad de analizar la derivada de una función algebraica , por lo que al estudiar este nuevo tema sobre derivadas se dan primeramente las fórmulas a aplicar, las mismas que nos permitirán relacionar el conocimiento nuevo

con el conocimiento que ya posee, esto le permitirá que aprenda en forma secuencial.

3 $\text{Sen } 2x;\ 3^x;\ \ln(4x);\ \log(1+2x);\ \ln(1+x2)$ ıda de funciones trascendentes

Ahora vamos a considerar funciones como:

que se denominan funciones transcendentes para distinguirlas de las funciones algebraicas que hemos estudiado hasta aquí.

3.21. Derivada de las funciones logarítmicas y exponenciales

1. $y = \log_a v \qquad y' = \dfrac{\log_a e}{v}.v' \qquad a = \text{constante}$

$y = \ln v \qquad y' = \dfrac{1}{v}\cdot v' \qquad v = \text{función de } x$

2. $y = a^v \qquad y' = a^v.\ln a.v'$

$y = e^v \qquad y' = e^v.v'$

3. $y = u^v \qquad y' = u^v\left(\dfrac{u'v}{u} + \ln u.v'\right) \qquad u, v = \text{función de } x$

Debemos tomar en cuenta que:

$$\ln v = \log_e v$$

$$\log_a(A * B) = \log_a A + \log_a B$$

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

$$\log_a A^n = n \log_a A$$

$$\log_b b \to 1$$

Ejercicios resueltos

1. $y = \ln x \qquad y' = \dfrac{1}{x}$

2. $y = \ln(x^2 + a) \qquad y' = \dfrac{1}{(x^2 + a)} \cdot (2x)$

3. $y = \ln(x^2 + 3x + 1) \qquad y' = \dfrac{1}{(x^2 + 3x + 1)} \cdot (2x + 3)$

4. $y = \ln \dfrac{x^2 + 5}{x + 6}$

$a \Rightarrow y = \ln(x^2 + 5) - \ln(x + 6) \qquad y' = \dfrac{1}{(x^2 + 5)}(2x) - \dfrac{1}{(x + 6)}$

$b \Rightarrow y = \ln \dfrac{x^2 + 5}{x + 6}$

$$y' = \frac{1}{\frac{x^2 + 5}{x + 6}} \cdot \frac{(2x)(x + 6) - (x^2 + 5)}{(x + 6)^2} = \frac{1}{x^2 + 5} \cdot \frac{(2x^2 + 12x - x^2 - 5)}{(x + 6)}$$

$$y' = \frac{1}{x^2 + 5} \frac{(x^2 + 12x - 5)}{(x + 6)}$$

5. $y = \ln\left[(x^3 + 5)^3 (x + 6)^7\right]$

$a \Rightarrow y = \ln(x^3 + 5)^3 + \ln(x + 6)^7 = 3\ln(x^3 +) + 7\ln(x + 6)$

$$y' = \frac{9x^2}{(x^3 + 5)} + \frac{7}{(x + 6)}$$

$b \Rightarrow y = \ln\left[(x^3 + 5)^3 (x + 6)^7\right]$

$$y' = \frac{1}{(x^3 + 5)^3 (x + 6)^7} \cdot \left[3(x^3 + 5)^2 (3x^2)(x + 6)^7 + 7(x + 6)^6 (x^3 + 5)^3\right]$$

6. $y = \ln\sqrt{3x - 7x\sqrt[3]{x - 1}}$

$y = \ln\sqrt{3x - 7\sqrt[3]{x^4 - x^3}}$

$y = \ln\left(3x - 7(x^4 - x^3)^{1/3}\right)^{1/2}$

$$y' = \frac{1}{\left(3x - 7(x^4 - x^3)^{1/3}\right)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2}\left(3x - 7(x^4 - x^3)^{1/3}\right)^{-1/2} \cdot \left(3 - \frac{7}{3}(x^4 - x^3)^{-2/3}(4x^3 - 3x^2)\right)$$

7. $y = 2^{3x^2}$

$\Rightarrow y = x^2 \cdot \ln x \cdot y$

$y' = 2^{3x^2} \cdot \ln 2 \cdot 6x$

8. $y = a^{3x^2 + 5x - 2}$

$y' = a^{3x^2 + 5x - 2} \cdot \ln a \cdot (6x + 5)$

9. $y = 3^{5x^2 - 7x + 3}$

$y' = 3^{5x^2 - 7x + 3} \cdot \ln 3 \cdot (10x - 7)$

10. $y = b^{4x^2 + 5x + 6}$

$y' = b^{4x^2 + 5x + 6} \cdot \ln b \cdot (8x + 5)$

11. $y = 2^{\frac{x + 5}{x - 6}}$

$y' = 2^{\frac{x + 5}{x - 6}} \ln 2 \left[\dfrac{(x - 6) - (x + 5)}{(x + 5)^2}\right]$

12. $y = 5^{x^2 + \frac{1}{x} + 1}$

$y' = 5^{x^2 + \frac{1}{x} + 1} \cdot \ln 5 \cdot \dfrac{ex(x + 1) - (x^2 + 1)}{(x + 1)^2}$

13. $y = be^{a^2 + x^2}$

$y' = be^{a^2 + x^2} (2x)$

14. $y = x^{3x + 5}$

$y' = x^{3x + 5}\left[\dfrac{3x + 5}{x} + \ln x (3)\right]$

15. $y = e^{x^2}$

$2 \Rightarrow \quad y' = e^{x^2} . 2x$

16. $y = e^{5x^2}$

$y' = e^{5x^2} . 10x$

17. $y = e^{3x^2 - 7x + 2}$

$y' = e^{3x^2 - 7x + 2}(6x - 7)$

18. $y = e^{\frac{(3x^2 - 7)}{x - 5}}$

$y' = e^{\frac{(3x^2 - 7)}{x - 5}} \cdot \dfrac{6x(x - 5) - (3x^2 - 7)}{(x - 5)^2}$

19. $y = x^{e^x}$

$y' = x^{e^x}\left[\dfrac{e^x}{x} + \ln x e^x\right]$

Nota: Para derivar una función exponencial, especialmente cuando se trata de una variable con exponente variable, lo mejor es, en primer lugar, tomar el logaritmo natural de la función y después derivar, considerando que la derivada de y es y'

Así por ejemplo en el ejercicio $y = x^{e^x}$ se resuelve con mayor elegancia de la siguiente manera:

1. $y = x^{e^x}$

Tomamos logaritmos en ambos miembros de la igualdad.

$$\ln y = \ln x^{e^x}$$

Aplicamos las propiedades:

$$\ln y = e^x \ln x$$

Derivamos:

$$\frac{1}{y} y' = e^x \ln x + \frac{e}{x}$$

Despejamos y' y remplazamos: $y' = x^{e^x}\left[e^x + \ln x + \dfrac{e}{x}\right]$

21. $y = x^3 . e^{3x} \ln x^2$

$$y' = 3x^2 e^{3x} \ln x^2 + x^3 e^{3x} .3 \ln x^2 + x^3 e^{3x} \frac{1}{x^2} .2x$$

22. $y = 7^{\frac{\ln(x^2-1)}{\ln\frac{x+1}{x-1}}}$

$$y' = 7^{\frac{\ln(x^2-1)}{\ln\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \ln 7 \frac{\frac{1}{x^2-1}(2x)\cdot \ln\frac{x+1}{x-1} - \ln(x^2-1)\cdot\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}{\ln^2\frac{(x+1)}{x-1}}$$

23. $y = (x^2 - 5x)^{x^3}$

a. $y' = (x^2 - 5x)^{x^3} \cdot \left[\dfrac{(2x-5)\cdot x^3}{x^2-5} + \ln(x^2-5x)\cdot 3x^2\right]$

b. $y = (x^2 - 5x)^{x^3}$

$\ln y = \ln(x^2 - 5x)^{x^3}$

$\ln y = x^3 \cdot \ln(x^2 - 5x)$

$\dfrac{1}{y} \cdot y' = 3x^2 \cdot \ln(x^2 - 5x) + \dfrac{x^3(2x-5)}{x^2 - 5x}$

$y' = (x^2 - 5x)^{x^3}\left[3x^2 \cdot \ln(x^2 - 5x) + \dfrac{x^3(2x-5)}{x^2 - 5x}\right]$

24. $y = (4x^2 - 7)^{2+\sqrt{x^2+5}}$

$$y' = (4x^2 - 7)^{2+\sqrt{x^2+5}} \cdot \left[\frac{8x\cdot(x^2+5)}{4x^2-7} + \ln(4x^2-7)\cdot\frac{1}{2}(x^2+5)^{-1/2} 2x\right]$$

25. $y = x^{x^x}$

$u = x \qquad v = x^x$

$u' = 1 \qquad v' = x^x[1 + \ln x]$

$y' = x^{x^x}\left[\dfrac{x^x}{x} + \ln x \cdot x^x(1 + \ln(x))\right]$

26. $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

$y = \left[\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right]^{1/2}$

$\ln y = \frac{1}{2}[\ln(x-1) + \ln(x-2) - \ln(x-3) - \ln(x-4)]$

$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(x-1)} + \dfrac{1}{(x-2)} - \dfrac{1}{(x-3)} - \dfrac{1}{(x-4)}\right]$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\cdot\left[\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x-3)}-\frac{1}{(x-4)}\right]$$

27. $y=x^3e^{3x}\ln\left(x^2\right)\cdot 5^x$

$$\ln y=\left[\ln x^3+\ln e^{3x}+\ln.\ln\left(x^2\right)+\ln 5^x\right]$$

$$y'=\left(x^3e^{3x}\ln\left(x^2\right)5^x\right)\left[\frac{1}{x^3}\cdot 3x^2+\frac{1}{e^{3x}}e^{3x}\cdot 3+\frac{1}{\ln x^2}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x+\frac{1}{5^x}\cdot 5^x\cdot 5\right]$$

3.22. Actividad de autoevaluacion

- La resolución de los ejercicios propuestos se la debe hacer paso a paso, no mirar el texto, pero pudiendo utilizar el formulario. Una vez finalizado el ejercicio compare el resultado obtenido con sus compañeros, sino coinciden, repita el ejercicio.

- La tarea de aprendizaje comprende, para su resolución rápida y exacta de la aplicación de las fórmulas pertinentes y el dominio de las operaciones que se realizan con las funciones algebraicas y trascendentes así como la perfecta comprensión de su significado matemático.

- Resuelva los siguientes ejercicios:

1. $y=\log\frac{2x}{1+x^2}$ $\qquad$ $y'=\log e\,\frac{1-x^2}{x(1+x^2)}$

2. $y=\ln\sqrt{1+x^2}$ $\qquad$ $y'=\frac{x}{x^2+1}$

3. $y=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ $\qquad$ $y'=\frac{2x}{1-x^4}$

4. $y=(x^2+5)^{x^2-e^{x^2}-x}$

5. $y=(4x^2-7)^{2-\sqrt{x^2}}$

6. $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

7. $y=\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ $\qquad$ $y'=\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

8. $y=\ln(1-x)-\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

3.23. Derivadas de las funciones trigonometricas

$y=\mathrm{Sen}v$	$y'=\mathrm{Cos}v.v'$
$y=\mathrm{Cos}v$	$y'=-\mathrm{Sen}v.v'$
$y=\mathrm{Tg}v$	$y'=\mathrm{Sec}^2v.v'$
$y=\mathrm{Ctg}v$	$y'=-\mathrm{Csc}^2v.v'$
$y=\mathrm{Sec}v$	$y'=\mathrm{Sec}v.\mathrm{Tg}v.v'$
$y=\mathrm{Csc}v$	$y'=-\mathrm{Csc}v.\mathrm{Ctg}v.v'$

Ejercicios resueltos

1. $y=\mathrm{Sen}(2x)$ $\qquad$ $y'=\mathrm{Cos}(2x)2$
2. $y=\mathrm{Sen}\left(ax^2\right)$ $\qquad$ $y'=\mathrm{Cos}\left(ax^2\right)(2ax)$
3. $y=\mathrm{Sen}\left(x^2+3x+1\right)$ $\qquad$ $y'=\left[\mathrm{Cos}\left(x^2+3x+1\right)\right](2x+2)$
4. $y=\mathrm{Cos}(2x)-\mathrm{Sen}(3x)$ $\qquad$ $y'=\left[-\mathrm{Sen}(2x)\right]2-\left[\mathrm{Cos}(3x)\right]3$

5. $y = tg\sqrt{x^2-1}$

$y = tg(x^2-1)^{1/2}$

$y' = Sec^2(x^2-1)^{1/2} \cdot \frac{1}{2}(x^2-1)^{-1/2}(2x)$

$y' = \left[Sec^2(x^2-1)^{1/2}\right] \cdot x(x^2-1)^{-1/2}$

6. $y = Sen\,\frac{x^2+3}{x^2-5}$

$y' = Cos\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}\right)\left[\frac{(2x)(x^2-5)-(2x)(x^2+3)}{(x^2-5)^2}\right]$

7. $y = Sen\left[(x^2-5)^8(x^3-8)^6\right]$

$y' = Cos\left[(x^2-5)^8(x^3-8)^6\right]\left[8(x^2-5)^7(2x)(x^3-8)^6 + 6(x^3-8)^5(3x^2)(x^2-5)^8\right]$

8. $y = Sen\left[\ln(x^2-5)\right]$

$y' = Cos\left[\ln(x^2-5)\right]\left[\frac{1}{(x^2-5)}(2x)\right]$

9. $y = [Sen(2x)]^{[\cos(3x)]^{5x^2}}$

$y' = [Sen(2x)]^{[\cos(3x)]^{5x^2}}\left[\frac{2\cos(2x)[\cos(3x)]^{5x^2}}{sen2x} + \ln sen(2x)[\cos(3x)]^{5x^2}\left(\frac{-3sen(3x)5x^2}{\cos 3x} + \ln\cos(3x)10x\right)\right]$

3.24. Actividad de auto evaluación

- La resolución de los ejercicios propuestos se la debe hacer paso a paso, no mirar el texto, pero pudiendo utilizar el formulario. Una vez finalizado el ejercicio compare el resultado obtenido con sus compañeros, sino coinciden, repita el ejercicio.

- Para derivar funciones trigonométricas, motivo de la siguiente tarea de aprendizaje, se debe aplicar las fórmulas correspondientes, y desarrollar cada ejercicio con sus particulares

operaciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

- Resuelva los siguientes ejercicios.

1. $y = tg\left[sen\,\frac{\sqrt{x}}{\cos x}\right]$

2. $y = sen\left[\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}.sen(4x^2)\right]$

3. $y = \left(\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{a^2-1+x^2}\,\ln senx\right)^{1/2}$

4. $y = [\cos(3x)]^{[sen(4x)]^{tg(x^2)}}$

5. $y = sen\left[\frac{1}{x - sen\left(\frac{x}{x - senx}\right)}\right]$

6. $y = \ln\frac{1}{x - \frac{2}{x - sen(x^2+1)}}$

7. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}}$ $\qquad y' = \frac{1}{1+2senx}$

8. $y = \frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2+4}+2\ln\left[(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+4}\right]$ $\qquad y' = \sqrt{5+2x+x^2}$

9. $y = \frac{x}{2}\sqrt{2x^2+5}+\frac{5}{2\sqrt{2}}\ln\left(x\sqrt{2}+\sqrt{2x^2+5}\right)$

10. $y = \frac{3x+2}{6}\sqrt{3x^2+4x+7}-\frac{25\sqrt{3}}{18}\ln\left(3x+2+\sqrt{3x^2+12x-21}\right)$

3.25. Derivadas de funciones implícitas.

Cuando se da una relación entre "x" e "y"; por medio de una ecuación no resuelta para "y", entonces "y" se denomina función implícita de "x" así por ejemplo.

$x^2 - 4y = 0$ función implícita

En esta ecuación "y" se define como función implícita de "x". Es claro que por medio de esta ecuación "x" se define igualmente como función implícita de "y".

A veces es posible resolver la ecuación que define una función implícita con respecto a una de las variables, obteniéndose así una función explícita. Por ejemplo:

$y = \frac{x^2}{4}$ función explícita

En esta última ecuación "y" aparece como una función explícita de "x", pero puede ocurrir que en algunos casos el despeje o la resolución no sea posible o que resulte demasiado complicado para una aplicación cómoda.

Por lo que a continuación enunciamos una regla para derivar funciones implícitas

3.26. Derivada de las funciones implícitas.

Derivar la ecuación término a término considerando a "y" como una función de "x", y de la ecuación resultante, despejar $\frac{dy}{dx}$

para esto tomar en cuenta que:

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

$$\frac{d}{dx}y^2 = 2y \cdot y'$$

$$\frac{d}{dx}y^3 = 3y \cdot y'$$

$$\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1} \cdot y'$$

Ejercicios Resueltos

1. $4x - 3y = 5$

a) Despejando y

$$y = \frac{4x}{3} - \frac{5}{3}$$

$$y' = \frac{4}{3}$$

b) Considerando implícitas

$$\frac{d}{dx}(4x) - \frac{d}{dx}(3y) = \frac{d}{dx}(5)$$

$$4 - 3y' = 0$$

$$y' = \frac{4}{3}$$

2. $2x - 3y' = 0$

$$y' = \frac{2}{3}x$$

3. $3x^4 - 2x^2 + 1 = y^2 - y$

$$12x^3 - 4x = 2yy' - y'$$

$$y'(2y - 1) = 12x^3 - 4x$$

$$y' = \frac{12x^3 - 4x}{2y - 1}$$

4. $15x - 3y^5 - 5y^3 = 3x^2 - 7x^3$

$15 - 15y^4y' - 15y^2y' = 6x - 21x^2$

$y'(-15y^4 - 15y^2) = 6x - 21x^2 - 15$

$$y' = \frac{6x - 21x^2 - 15}{-15y^4 - 15y^2}$$

5. $x^3y^2 - x = 2y - 1$ $\qquad u'v + uv'$

$3x^2y^2 + 2x^3yy' - 1 = 2y'$

$$y' = \frac{3x^2y^2 - 1}{2 - 2x^3y}$$

6. $x^4y^3 - x^2y^2 = ax^5$ $\qquad u'v + uv'$

$4x^3y^3 + 3x^4y^2y' - 2xy^2 - 2x^2yy' = 5ax^4$

$$y' = \frac{5ax^4 - 4x^3y^3 + 2xy^2}{3x^4y^2 - 2x^2y}$$

7. $2ax^3 - 2x^3y - xy^7 = x^2y^3 - 3x^3y^4 - 2xy^3$

$6ax^2 - 6x^2y - 2x^3y' - y^7 - 7xy^6y' = 2xy^3 + 3x^2y^2y' - 9x^2y^4 - 12x^3y^3y' - 2y^3 - 6xy^2y'$

$$y' = \frac{-6ax^2 + 6x^2y + y^7 + 2xy^3 + 9x^2y^4 + 2y^3}{-2x^3 - 7xy^6 - 3x^2y^2 + 12x^3y^3 + 6xy^2}$$

8. $x^2y^3 - 3x^3y^4 + 2xy^3 = 7x^3y^2 + 6\sqrt{y}$

$2xy^3 + 3x^2y^2y' - 9x^2y^4 - 12x^3y^3y' + 2y^3 + 6xy^2y' = 21x^2y^2 + 14x^3yy' + 3y^{-1/2}$

$3x^2y^2y' - 12x^3y^3y' + 6xy^2y' - 14x^3yy' = 21x^2y^2 + 3y^{-1/2} - 2xy^3 + 9x^2y^4 - 2y^3$

$y'(3x^2y^2 - 12x^3y^3 + 6xy^2 - 14x^3y) = 21x^2y^2 + 3y^{-1/2} - 2xy^3 + 9x^2y^4 - 2y^3$

$$y' = \frac{21x^2y^2 + 3y^{-1/2} - 2xy^3 + 9x^2y^4 - 2y^3}{3x^2y^2 - 12x^3y^3 + 6xy^2 - 14x^3y}$$

9. $4xy^4 - 3x^3y^2 - 2x^{3/2}y^{3/2} = x + 2\sqrt{xy}$

$4y^4 + 16xy^3y' - 9x^2y^2 - 6x^3yy' - 3x^{1/2}y^{3/2} - \frac{4}{3}x^{3/2}y^{1/2}y' = 1 + x^{-1/2}y^{1/2} + x^{1/2}y^{-1/2}y'$

$$y' = \frac{1 + x^{-1/2}y^{1/2} - 4y^4 + 9x^2y^2 + 3x^{1/2}y^{3/2}}{16xy^3 - 6x^3y - \frac{4}{3}x^{3/2}y^{1/2} - x^{1/2}y^{-1/2}}$$

10. $\dfrac{8x^{3/2}}{y^{-3/2}} - \dfrac{\sqrt{8x^3}}{y^2} = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{y^3}}$

$8x^{3/2}\cdot y^{3/2} - \sqrt{8}x^{3/2}\cdot y^{-2} = \sqrt{3}x^{2/3}y^{-3/4}$

$12x^{1/2}\cdot y^{3/2} + \frac{16}{3}x^{3/2}y^{1/2}y' - \frac{3}{2}\sqrt{8}x^{1/2}\cdot y^{-2} + 2(8)^{1/2}x^{3/2}y^{-3}y' = \frac{2}{3}(3)^{1/2}x^{-1/3}y^{-3/4} - \frac{3}{4}(3)^{1/2}x^{2/3}y^{-7/4}y'$

$$y' = \frac{\frac{2}{3}(3)^{1/2}x^{-1/3}y^{-3/4} - 12x^{1/2}\cdot y^{3/2} + \frac{3}{2}\sqrt{8}x^{1/2}\cdot y^{-2}}{\frac{16}{3}x^{3/2}y^{1/2} + 2(8)^{1/2}x^{3/2}y^{-3} + \frac{3}{4}(3)^{1/2}x^{2/3}y^{-7/4}}$$

11. $e^y - y = \operatorname{sen}(x+y) - \cos(x-y)$

$e^y\cdot y' - y' = \cos(x+y)\cdot(1+y') + \operatorname{sen}(x-y)\cdot(1-y')$

$e^y\cdot y' - y' = \cos(x+y) + y'\cos(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) - \operatorname{sen}(x-y)\cdot y'$

$$y' = \frac{\cos(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)}{e^y - 1 - \cos(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)}$$

12. $xy^2 - \operatorname{sen}(x^2y^2) = \operatorname{sen}\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{y}{x}$

$y^2 + 2xyy' - \cos(x^2y^2)(2xy^2 + 2x^2yy') = \cos(xy^{-1})(y^{-1} - xy^{-2}y') + \operatorname{sen}(yx^{-1})(y'x^{-1} - yx^{-2})$

$$y' = \frac{-y^2 + 2xy^2\cos(x^2y^2) + y^{-1}\cos(xy^{-1}) + yx^{-2}\operatorname{sen}(yx^{-1})}{2xy - 2x^2y\cos(x^2y^2) + xy^{-2}\cos(xy^{-1}) - x^{-1}\operatorname{sen}(yx^{-1})}$$

13. $\sqrt{xy} - \operatorname{arctg} x^{2/3}y^{1/3} - \ln(xy^2) = \operatorname{arctgh}(xy^2)$

$\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2} + \frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2}y' - \frac{1}{1+x^{4/3}}\,\frac{2}{3}x^{-1/3}\cdot y^{1/3} - \operatorname{arctg}x^{2/3}\,\frac{1}{3}y^{-2/3}y' - \frac{1}{xy^2}(y^2 + 2xyy') =$

$\frac{1}{1-(x^2y^4)}(y^2 + 2xyy')$

$$y' = \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2} - \frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3}}{1+x^{4/3}} - \frac{y^2}{xy^2} + \frac{y^2}{1-(x^2y^4)}}{\frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2} - \operatorname{arctg}x^{2/3}\,\frac{1}{3}y^{-2/3} + \frac{2xy}{xy^2} - \frac{2xy}{1-(x^2y^4)}}$$

14. Si: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ Verificar que $y''(x) = -\dfrac{b^4}{a^2y^3}$

- **Primera Derivada**

$$2b^2x - 2a^2yy' = 0$$

$$y' = \frac{b^2x}{a^2y}$$

- **Segunda Derivada**

$$y'' = \frac{a^2b^2y - a^2b^2xy'}{a^4y^2}$$

$$y'' = \frac{b^2(y - xy')}{a^2y^2}$$

$$y'' = \frac{b^2\left(y - \frac{xb^2x}{a^2y}\right)}{a^2y^2}$$

$$y'' = \frac{b^2\left(\frac{a^2y^2 - b^2x^2}{a^2y}\right)}{a^2y^2}$$

$$y'' = \frac{b^2(a^2y^2 - b^2x^2)}{a^4y^3}$$ pero $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$

entonces

$$y'' = -\frac{a^2b^4}{a^4y^3}$$

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

15. Si: $2xy - 3x^2y^2 + 5 = 0$ **Verifique que:** $y''(x) = -\frac{6y}{x^3}$

Primera Derivada

$$2y + 2xy' - 6xy^2 - 6x^2yy' = 0$$

$$y'(2x - 6x^2y) = 6xy^2 - 2y$$

$$y' = \frac{6xy^2 - 2y}{2x - 6x^2y}$$

$$y' = \frac{-2y(1 - 3xy)}{2x(1 - 3xy)}$$

$$y' = \frac{-y}{x}$$

Segunda Derivada

$$y'' = \frac{y'x - y}{x^2}$$

$$y'' = -\frac{\frac{-y}{x}(x) - y}{x^2}$$

$$y'' = \frac{2y}{x^2}$$

Tercera Derivada

$$y''' = \frac{2x^2y' - 4xy}{x^4}$$

$$y''' = \frac{2x^2\left(\frac{-y}{x}\right) - 4xy}{x^4}$$

$$y''' = \frac{-2xy - 4xy}{x^4}$$

$$y''' = \frac{-6xy}{x^4}$$

$$y''' = -\frac{6y}{x^3}$$

16. $2xy - 4x^3y^3 = 5$

¿Calcular y'=?,

y''=? en el punto (1,1)

$$2y + 2xy' - 12x^2y^3 - 12x^3y^2y' = 0$$

$$y' = \frac{-2y + 12x^2y^3}{2x - 12x^3y^2}$$

$$y' = \frac{-2y(1 - 6x^2y^2)}{2x(1 - 6x^2y^2)}$$

$$y' = \frac{-y}{x}$$

$$y'(1,1) = -1$$

$$y'' = \frac{-y'x - y}{x^2}$$

$$y'' = -\frac{(-1-1)}{1}$$

$$y''(1,1) = 2$$

17. Obtener el volumen desde y' ^ y'' si:

$3x^2y^2 - 2y^2 + 4xy = 3$ En (1,1)

$6xy^2 + 6x^2yy' - 4yy' + 4y + 4xy' = 0$

$$y'(6x^2y - 4y + 4x) = -4y - 6xy^2$$

$$y' = \frac{-4y - 6xy^2}{6x^2y - 4y + 4x}$$

$$y' = \frac{-2y(2 + 3xy)}{2(3x^2 - 2y + 2x)}$$

$$y' = \frac{-3xy^2 + 2y}{3x^2 - 2y + 2x}$$

$$y'(1,1) = -\frac{3+2}{3-2+2}$$

$$y'(1,1) = \frac{-5}{3}$$

$$y'' = -\frac{(3y^2 + 6xyy' + 2y')(3x^2y - 2y + 2x) - (3xy^2 + 2y)(6xy + 3x^2y' - 2y' + 2)}{(3x^2y - 2y + 2x)^2}$$

$$y''(1,1) = -\frac{\left[3 + 6\left(-\frac{5}{3}\right) + 2\left(-\frac{5}{3}\right)\right](3 - 2 + 2) - (3+2)\left[6 + 3\left(-\frac{5}{3}\right) - 2\left(-\frac{5}{3}\right) + 2\right]}{(3-2+2)^2}$$

$$y''(1,1) = -\frac{188}{27}$$

3.27. Actividad de auto evaluación

- La resolución de los ejercicios propuestos se la debe hacer paso a paso, no mirar el texto, pero pudiendo utilizar el formulario. Una vez finalizado el ejercicio compare el resultado obtenido con sus compañeros, sino coinciden, repita el ejercicio.

- Para derivar funciones implícitas, motivo de la siguiente tarea de aprendizaje, se debe aplicar la regla correspondiente, y desarrollar cada ejercicio con sus particulares operaciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

- Resuelva los siguientes ejercicios.

1. $3x^2y^3 - 5xy^2 - 2xy = 0$
2. $\sqrt{x^3}\sqrt{x^4} + x^{3/2}y^{1/2} = 5x^3y^2$
3. $ax^4y^4 + bxy^3 = cx^2y^2 + d\sqrt{x}$
4. $y = Cos(x - y)$
5. $e^y = Sen(x + y)$
6. $xy^2 = Senx^2y^2$
7. $xy = Sen\frac{x}{y} + Cos\frac{y}{x}$

3.28. Interpretación geometríca de la derivada.

El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en aquel punto.

En otras palabras la derivada $f'(x)$ en un punto x, representa el valor de la pendiente de la tangente a la curva y = f(x) en el (x,f(x)),

Ejercicios resueltos

Hallar el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva x^2, en el punto x = ½ y el ángulo de la forma con el eje x.

Calculamos la derivada de $y = x^2$

$$y' = 2x$$

Para hallar la pendiente de la tangente en x = ½ , basta sustituir este valor en y', entonces.

$$y'_{1/2} = 2(1/2)=1$$

De donde $\quad m = y' = tg\ \beta = 1$

Por lo tanto $\quad$ arc tag 1 = 45º

Dada las ecuaciones $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 25 = 0 \wedge x^2 + y^2 + 2x + y = 10$ o Demuestran que sus pendientes son iguales en el punto (2;1)

3.29. Actividad de auto evaluación

- La resolución de los ejercicios propuestos se la debe hacer paso a paso, no mirar el texto, pero pudiendo utilizar el formulario. Una vez finalizado el ejercicio compare el resultado obtenido con sus compañeros, sino coinciden, repita el ejercicio.

- Para ejecutar la siguiente tarea de aprendizaje, se debe aplicar las fórmulas correspondientes y desarrollar el ejercicio con sus particulares operaci

- Resuelva los siguientes ejercicios

1. Dada la curva . $x^2y^3 - 3x^3y^4 + 2xy^3 = 5$ Calcular la pendiente de la recta normal al punto (1;1)

2. Dada la ecuación $4x^2 + 9y^2 = 40$. Calcular la ecuación de las rectas normal y tangente con el punto de tangencia. P(1;2)

3. Calcular las coordenadas del vértice de la parábola $y = x^2 - 4x+1$ teniendo en cuenta que la pendiente de la tangente en dicho punto es igual a cero.

4. Calcular las pendientes de las tangentes a la parábola $y = x^2 + 5x-6$ en los puntos de la intersección con el eje x.

3.30. Aplicación de la derivada – optimización.

3.30.1. Presentación

En este capítulo tratamos el estudio de los puntos extremos de una función, es decir, el cálculo de máximos y mínimos con la aplicación del método de la primera y segunda derivada.

Se resuelven y plantean problemas en los que se requiere obtener resultados óptimos, lo que se denomina optimización que no es más que la aplicación de máximos y mínimos.

Una de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial se presenta en los llamados problemas sobre máximos y mínimos, que es un instrumento fundamental para minimizar

o maximizar determinado fenómeno, es decir, obtener un resultado óptimo para un conjunto de posibilidades.

3.31. Objetivos.

- Utilizar el criterio de la primera y segunda derivada de una función para hallar máximo y mínimos de la función.

- Dada una función, encontrar los puntos de inflexión (si existen) y los intervalos donde la función es cóncava o convexa.

- Aplicar los conceptos de primera y segunda derivada en la resolución de problemas prácticos de optimización.

3.32. Orientación metodológica

El estudio de esta capitulo se recomienda se lo efectué por secciones. En una primera sección se estudiará la función creciente y decreciente, comprendido el tema pasar a estudiar máximos y mínimos y los criterios de primera y segunda derivada para el cálculo de los mismos, entendidos los dos temas, pase a estudiar optimización como una aplicación de máximos y mínimos.

Por cada uno de los temas estudiados, le recomendamos ir preparando un formulario, para que este se lo pueda utilizar en la resolución de los ejercicios propuestos.

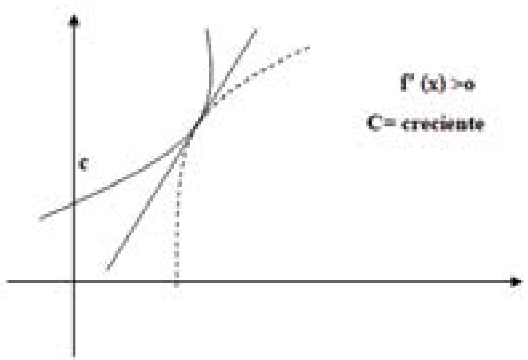
3.33. Contenido función creciente y decreciente

Función Creciente.- Una función y=f(x) es creciente sí “y” aumenta (algebraicamente) cuando “x” aumenta.

En otros términos f(x) es creciente si su gráfica está elevándose cuando “x” aumenta.

También podemos decir si una función es creciente tomando en cuenta el signo de su derivada esto se debe a que la derivada es la pendiente de la recta tangente así: Cuando la derivada es positiva la pendiente de la tangente es positiva y la función está creciendo, entonces:

Si f(Xo) > 0 para cada valor de x=xo en algún intervalo f(x) es creciente en ese intervalo



3.34. Función Decreciente.

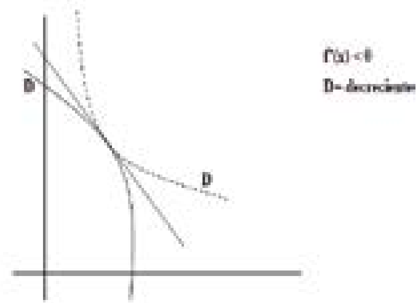
Una función y = f(x) es decreciente si “y” disminuye (algebraicamente) cuando x aumenta.

En otros términos, f(x) es decreciente si su gráfica está bajando

cuando x aumenta.

Tomando en cuenta el signo de la derivada, cuando la derivada es negativa, la pendiente de la tangente es negativa y la función está decreciendo, entonces.

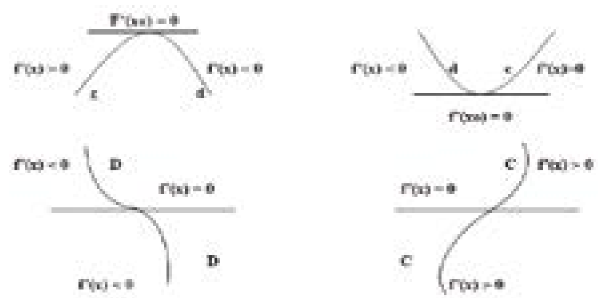
Sí f' (Xo) < o para cualquier valor de X = Xo en algún intervalo, entonces f(x) es decreciente en ese intervalo.



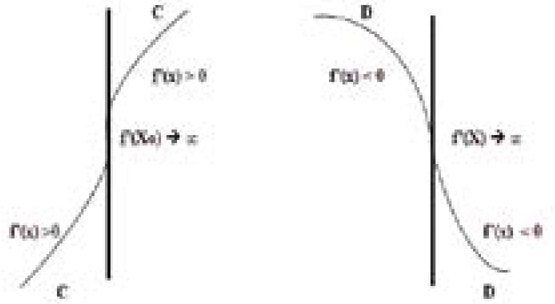
3.35. Función estacionaria.

Una función f(x) es estacionaria en el punto x = Xo:

Si f’(xo) = 0, puesto que la curva tiene tangente horizontal



Los valores para los cuales la función f(x) es estacionaria [f'(x) = 0], reciben el nombre de "valores críticos" (Xo) y los puntos correspondientes de la curva f(x) se denominan "puntos crìticos" (Yo = f(Xo))



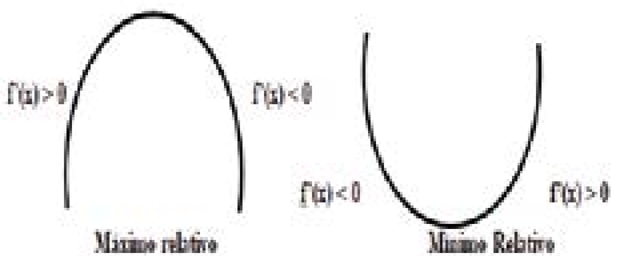
3.36. Máximos y mínimos.

En el estudio de esta sección desarrollaremos un procedimiento sistemático para poder localizar e identificar los puntos más altos o más bajos de una curva y = f(x).

Comenzamos definiendo máximo y mínimos relativos

3.37. Máximo relativo

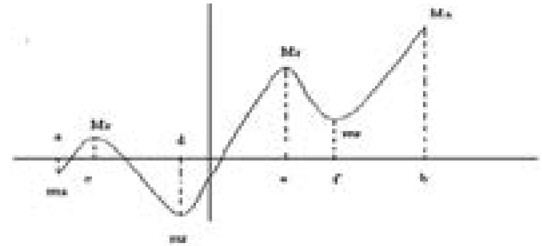
Se produce cuando una función deja de crecer y comienza a decrecer, es decir se produce cuando el signo de y' cambia de + a –



3.38. Mínimo relativo

Se produce cuando una función deja de decrecer y comienza a crecer, es decir se produce cuando el signo de la derivada **y'** cambia de – a +

Así por ejemplo sea la curva



La función representada tiene dos máximos, uno en x = c y otra en x = e, nótese que un máximo no tiene que ser un punto más alto de la gráfica. Es máximo solamente con relación a los puntos cercanos.

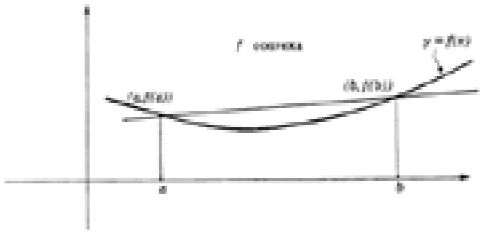
La función tiene dos mínimos x = d y x = f , de la misma manera un mínimo es un punto que es más bajo que cualquier punto cercano de la gráfica.

Un mínimo no tiene que ser el punto más bajo de la gráfica, es mínimo solamente en relación con los puntos cercanos. Más aun en la gráfica, el mínimo x = f es en realidad más alto que el máximo en x = c

Para determinar los máximos y los mínimos absolutos de una función continua en un intervalo a ≤ x ≤ b, localice todos sus puntos críticos y calcule su valor f(x) calcule f (a) y f(b) el mayor y el menor de todos estos valores son el máximo y el mínimo absolutos.

3.39. Concavidad y convexidad.
3.39.1. Convexa

Se dice que una función f es convexa en un intervalo, si para todo a y b de este intervalo, la cuerda que une (a, f(a)) con (b,f(b)) queda por encima de la gráfica de f.



Esta condición, puede expresarse de manera analítica, que algunas veces resulta más útil para las demostraciones, de la siguiente manera:

La recta entre (a, f(a)) y (b, f(b)) tiene por ecuación

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Como, por definición, la recta queda por encima de *f* se tiene que : y $\geq$ f(x) esto es:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \geq f(x)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \geq f(x) - f(a)$$

luego

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

V x tal que a < x < b.

Definición.- Una función real *f* se dice CONVEXA en A si V x, y Є A tal que x < y se cumple que:

F((1 - &) x + &y) ≤ (1 - &) f(x) + & f(y) para todo 0 < & < 1

La definición de concavidad es como sigue:

Cóncava

Se dice que una función f es cóncava en un intervalo, si para todo a y b de este intervalo el segmento rectilíneo que une (a,f(a)) con (b,f(b)) queda por debajo de la gráfica de f.

El significado geométrico de esta definición se ilustra en la figura 29.

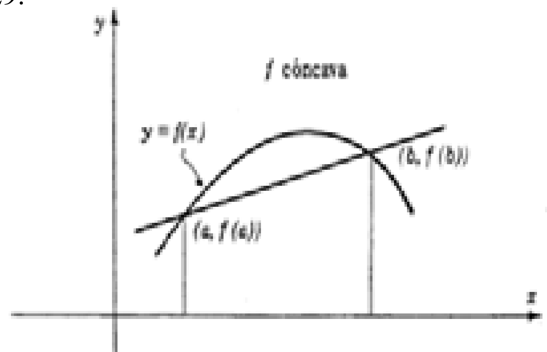


Figura 29

Es claro notar que las funciones cóncavas son de la forma de –f, donde f es convexa. Una definición equivalente de concavidad de f, es:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Definición.- Una función real f se dice cóncava en A si V x, y Є A, tal que x < y se tiene

F((1 - &) x + &y) $\geq$ (1 - &) f(x) + & f(y), 0 < & < 1

Teorema 5.- Sea f continua en [a, b] y derivable en]a, b[

a) Si f' es creciente en]a, b[en particular si f''$\geq$ 0 en]a, b[entonces f es convexa en [a, b]

b) Si f' es decreciente en]a, b[en particular si f''$\leq$ 0 en]a, b[entonces f es convexa en [a, b]

1. Determinar los intervalos de convexidad y de concavidad de la función f definida por:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 18x + l$$

Para esto calculamos la segunda derivada de f:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 18$$

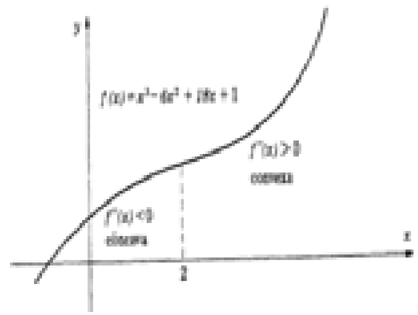
$$f''(x) = 6x - 12$$

Luego para el intervalo de convexidad se tiene que:

f "(x) > 0 Es decir que**: 6x - 12 > 0 → x > 2;** es decir que la curva es convexa en el intervalo **] 2, + ∞[.** En el intervalo de concavidad se tiene;

f "(x) < 0 Es decir que: **6x -12 < 0 =» x < 2 ,** es decir que la curva es cóncava en el intervalo **] — ∞ , 2 [.**

El gráfico de esta función se muestra en la figura 31.



3.40. Criterio de la primera derivada

1. Halle la primera derivada de la función y'(x)

2. Iguale la primera derivada a cero y'(x) = 0

Encuentre las raíces reales. Estas raíces son los "valores críticos" xc

3. Analice los valores críticos.

Para eso: considere los valores críticos uno por uno. Representando estos valores sobre el eje de abscisas, de esta manera se establecerá un cierto número de intervalos a analizar.

Determine el signo y’ en cada uno de los intervalos, un poco a la izquierda y un poco a la derecha de cada valor crítico xc.

Si el signo de y’ pasa de + a –, entonces la función tiene un máximo para ese valor crítico xc.

Si el signo de y’ pasa de – a +, entonces la función tiene un mínimo para este valor crítico.

Si el signo “no cambia” la función no tiene ni máximo ni mínimo para el valor considerado.

3.41. Criterio de la segunda derivada

1. Halle la primera derivada de la función y’(x)

2. Iguale a cero y’(x), resuelva la ecuación y’(x) = 0, las raíces reales son los valores críticos de la variable xc.

3. Halle la segunda derivada y’’(x)

4. Sustituya en la segunda derivada, en lugar de la variable, cada uno de los valores críticos obtenidos.

Si y’’(xc) < 0, la función tiene un máximo para ese valor crítico

Si y’’(xc) > 0, la función tiene un mínimo.

Cuando y’’(xc) = 0, o bien no existe máximo o mínimo, o este procedimiento no es aplicable, aunque todavía puede existir un máximo o un mínimo . En este caso se debe aplicar el primer método, que es el fundamental.

Se recomienda utilizar el segundo método cuando la obtención de la segunda derivada no es demasiado larga, este método por lo general es el más conveniente.

No debe confundirse la concavidad con los conceptos de crecimiento y decrecimiento de funciones.

Una función es cóncava puede ser creciente o decreciente en ese intervalo igualmente una función que es cóncava puede ser creciente o decreciente, así.

3.42. Punto de inflexión.

Es un punto en el cual la curva pasa de cóncava a convexa o viceversa

A continuación, anotemos una regla para llevar los puntos de inflexión de la curva Y = f(x).

La regla comprende también instrucciones para examinar el sentido de la concavidad.

- Calcule Y” (x)

- Haga Y” (x) = 0 y calcule sus raíces estos valores de Xo serán puntos de cambio de curvatura (considere únicamente las raíces reales)

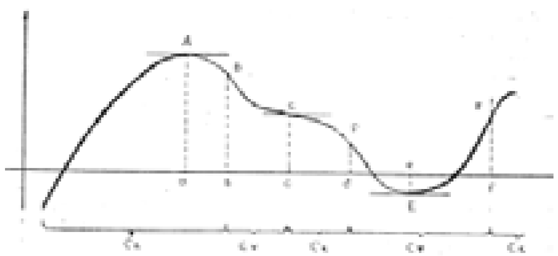
- Realice un análisis de cada Xo para valores un poco menores y un poco mayores si f”(x) cambia de signo si tenemos un punto de inflexión

Esto equivale a que $f'''(x) \neq 0$ (cuando exista tercera derivada)

- Cuando f” (x) es positiva, la curva es cóncava +

Cuando f” (x) es negativa la curva es convexa –

Así por ejemplo en la curva:



Ejercicios resueltos:

1. Indique los intervalos en los cuales la curva es creciente y decreciente si

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$

calculamos y’

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x + 2)(x - 1)$$

calculamos valores críticos xc, cuando y’ = 0

$$0 = 6(x + 2)(x - 1)$$

$$x = -2 \qquad x = 1$$

calculamos puntos críticos, reemplazando xc en y (x)

$$Y(-2) = 2(-8) + 3(4) - 12(-2) - 7 = -6 + 12 + 24 - 7$$

$$Y(-2) = 13$$

$$\Rightarrow Pc_1 = (-2, 13)$$

$$Y(1) = 2(1) + 3(1) - 12(1) - 7$$

$$Y(1) = 2 + 3 - 12 - 7 = -14$$

$$\Rightarrow Pc_2 = (1, -14)$$

Hacemos un análisis de y’ (x) muy cerca de xc para saber si son máximos o mínimos

- 3	- 2	- 1	0	1	2
+ - -		++ -	++ -		+++
+		-	-		+
$> 0 \Rightarrow$ C		$< 0 \Rightarrow$ D	$< 0 \Rightarrow$ D		$> 0 \Rightarrow$ C
	Max			Min	

Ejemplo: con (-3)

y’=6(x+2)(x-1)

y’= + (-) (-)

Calculamos puntos de inflexión cuando y’’ (x) = 0

Y’’ (x) = 12 x + 6

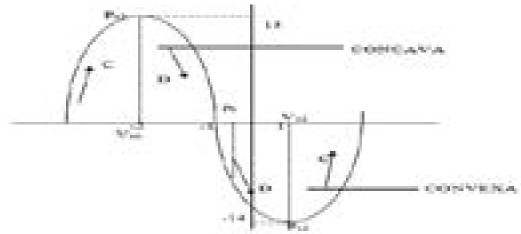
0 = 12 x + 6

0 = 6 (x + 1)

x = - 1

$\Rightarrow$ y(-1) = - 2 + 3 + 12 – 7 = 6   P I = (- 1, 6)

Esbozamos la gráfica de la curva

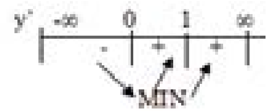


2.- Dada la función $y = 3x^4 – 8x^3 – 6x^2 + 2$

$y’ = 12x^3 – 24x^2 + 12x$

$0 = 12 (x^3 – 2x^2 + x)$ => $12x (x^2 – 2x + 1)$

$0 = 12x (x – 1)^2$



12x = 0 $(x – 1)^2 = 0$

Xc1 = 0   Xc2 = 1

(- ∞ ; 0) D
(0 ; 1)   C
(1 , ∞)   C

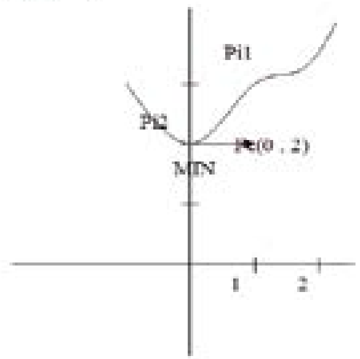
Pc (Xc ; f(Xc))

Pc1 (0 , 2)   MIN

Pc2 (1 , 3)

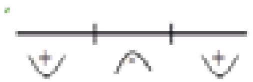
y” = 36x2 – 48x + 12

0 = 12(3x2 – 4x + 1)
0 = 12 (3x – 3) (3x – 1)



X1 = 1 X2 = 1/3

y” 1/3 1



Pi1 = (1 ; 3)

Pi2 = (1/3 ; 2,4)

3.-Dado la curva $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$ Determine los puntos

$y' = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12$

$0 = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12$

$y'' = 36x^2 - 60x - 24$

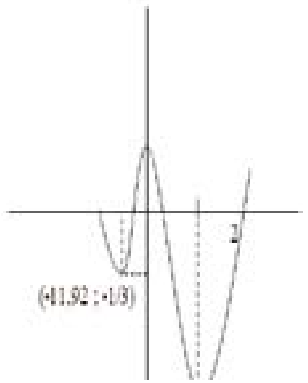
$0 = 12 (3x^2 - 5x - 2)$

$0 = \underline{12 (3x - 6) (3x + 1)}$

x = 2 x = - 1/3

yi1 = -63 yi2 = - 11,92

(-11,92 ; -1/3)



y''	-∞ -1/3	-1/3 2	2 +∞
3x + 1	-	+	+
x – 2	-	-	+

4.-Dado la curva $y = x^4 - 6x + 2$

$y' = 4x^3 - 6$

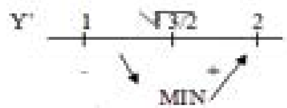
$0 = 4x^3 - 6$

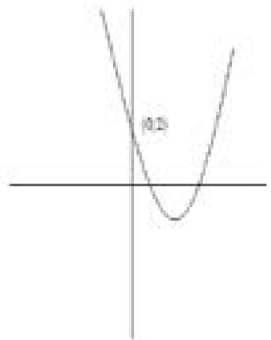
$4x^3 = 6$

$x^3 = 3/2$

Xc = $\sqrt[3]{3/2}$ = 1,14 Yc = - 3,15

Pc (1,14 ; - 3,15)



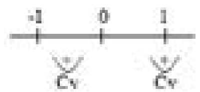


$y'' = 12x^2$

$0 = 12x^2$

x = 0

y”



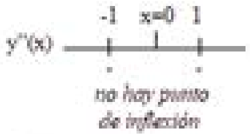
5.- $y = x^{2/3}$ determine cual es el Pi

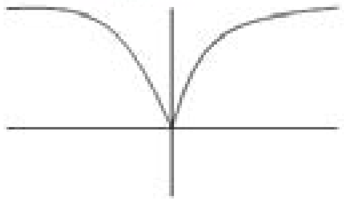
$$Y' = \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

$$Y'' = \frac{-2}{3} x^{-1/3} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

$$0 = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

$$x = 0$$

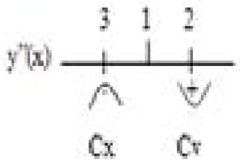




6.-Si $y = (x - 1)^{5/3}$ indique si tiene punto de inflexión y cual es?

$$y' = \frac{5}{3}(x-1)^{2/3}$$

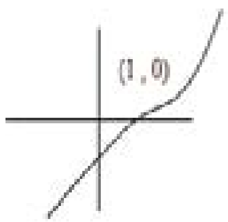
$$y'' = \frac{10}{9}(x-1)^{-1/3} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-1}}$$



$$0 = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-1}}$$

$$Pi = (Xi , f(xi))$$
$$= (1 , f(Xi))$$
$$= (1 ; 0)$$

$$Xi = 1//$$



3.43. Optimización.

Una de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial, se presenta en los llamados problemas sobre máximos y mínimos es un instrumento fundamental para minimizar y maximizar determinado fenómeno, es decir obtener un resultado óptimo

para un conjunto de posibilidades.

En un problema de optimización tenemos un objetivo, es decir el parámetro o la cantidad que deseamos maximizar o minimizar y además una o varias alternativas que son las restricciones propias de cada problema.

Cada vez que se empleen palabras como: más grande, mayor, más pequeño, mejor, máximo rendimiento, máximo alcance, mínimo costo, mínimo tiempo, etc. podemos traducirlas al lenguaje matemático en términos de máximos y mínimos.

Es necesario que recordemos que:

- Circulo : perímetro = $2 \pi r$ área = πr^2

- Sector Circular: área = $r^2 \frac{\alpha}{2}$ $\propto$ = ángulo del centro medido en radianes.

- Trapecio : área = $\frac{(b + B) h}{2}$

- Cilindro recto circular de altura h y radio basal r: volumen = $\pi r^2 h$

superficie lateral = $2\pi r h$

- Cono recto circular de altura h y radio basal r :

volumen = $\frac{\pi r h^2}{3}$; superficie lateral = πrL

con $L = \sqrt{r^2 + h^2}$

Esfera de radio r: volumen = $\frac{4\pi r^3}{3}$ superficie = $4\pi r^2$

A continuación enumeremos los pasos guías que se debe tomar en cuenta en la resolución de este tipo de problemas.

1. Traducir al lenguaje matemático el enunciado del problema. Para ello:

a) Trace una gráfica de ser necesario

b) Asigne una letra a cada una de las cantidades que aparezcan en el problema

2. Seleccionar la cantidad o maximizar o minimizar y expresarlo en función de las otras.

3. Si la forma que se obtiene depende de dos o más variables se debe eliminar por sustitución hasta que sólo dependan de una sola variable.

Para ello se usan las condiciones que se deriven del enunciado.

4. Cuando la función este puesto en una sola variable, bastará con encontrar su máximo y mínimo.

Para calcular el máximo o mínimo aplicar el criterio de la primera y segunda derivada.

	y = f(x)	y = f(x)
calcule	y'(x) y factor	y'= ?
haga	y'(x) = 0 resuelva y obtenga valores críticos	y''=
??		
calcule	y''(x)	0 = f'(x)→ y''→ ∞
sustituya	y''(x) los valores críticos	Xi
	si y'' (Xc) < 0 → MÁX	y''(Xi)→y''>oMIN
	si y'' (Xc) > 0 → MIN	y'' < o MÁX

Nota: todos estos problemas una vez traducidos al lenguaje matemático se reducen a encontrar una “x” para que la función f(x) sea máximo o mínimo.

Aplicaciones. -

Ejercicios resueltos

1. Encontrar dos números tales que su suma sea 60 y su producto sea máximo

Traduciendo al lenguaje matemático

$$X + Y = 60$$

$$P = X.Y$$

Como P esta en función de dos variables nos servimos de X + Y = 60

$$Y = 60 - X$$

En P

$\Rightarrow \quad P = X\,(60 - X)$

$P(X) = 60X - X^2$

Calculamos producto máximo

$P'(X) = 60 - 2X$

$0 = 60 - 2X$

$X = 30$

Encontramos el valor crítico de la segunda derivada

$P''(X) = -2$

$P''(30) = -2 < 0 \Rightarrow$ max.

Por lo tanto:

$X = 30$

$Y = 30$

$P = (30)(30) = 900.$

2. Encontrar dos números tales que su suma sea 20 y de tal manera que el cuadrado del primero por el cubo del segundo sea máxima.

Traduciendo de lenguaje

$X + Y = 20$

$X^2 Y^3 = P$

P depende de dos variables, debemos hacer que dependa de

una sola variable

Entonces nos servimos de $X + Y = 20$

$X = 20 - Y$

Sustituimos en P

$P = (20 - Y)^2\ Y^3$

Pasamos a calcular su producto máximo

$P(Y) = (20 - Y)^2\ Y^3$

$P'(Y) = 2\,(20 - Y)\,(-1)\,Y^3 + (20 - Y)^2\ 3Y^2$

$0 = (20 - Y)\ Y^2\ (-2Y + (20 - Y)\,3)$

$0 = (20 - Y)\ Y^2\ (-2Y + 60 - 3Y)$

$0 = (20 - Y)\ Y^2\ (-5Y + 60)$

$0 = 5\,Y^2\ (Y - 20)\,(Y - 12)$

$\Rightarrow \quad Y_c = 0 \quad Y_c = 20 \quad Y_c = 12$

Chequeamos :

$P'(Y)$ antes y después de Y_c

- 1 0 1 11 12 13
19 20 21

+ - - + - - + - - + - +
+ - + + + +

\+ + + -
\- +
Max. Min.

Por lo tanto,

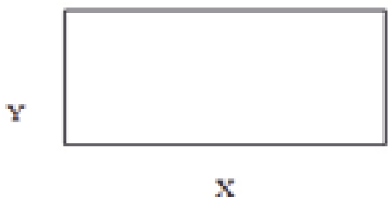
$Y = 12$ para producto máximo

$X = 8$

$\Rightarrow \quad P = (8)^2 \ (12)^3 = 110592$

3. De todos los rectángulos de perímetro 20 m. ¿Cuál es el de área máxima?

Si nuestro rectángulo es



Entonces el área es $A = X \cdot Y$

El área depende de dos variables (debemos hacer que dependa de una sola variable)

Para eso nos servimos del otro dato que es el perímetro.

$$P = 2X + 2Y = 20$$

$$\Rightarrow \quad X + Y = 10$$

$$Y = 10 -$$

Sustituimos en la expresión del área, con lo que nos queda.

$$A(X) = X(10 - X) = 10X - X^2$$

Pasamos a calcular su área máxima

$A'(X) = 10 - 2X$

$0 = 10 - 2X$

$2X = 10$

$X = 5$ valor crítico.

$A''(X) = -2$

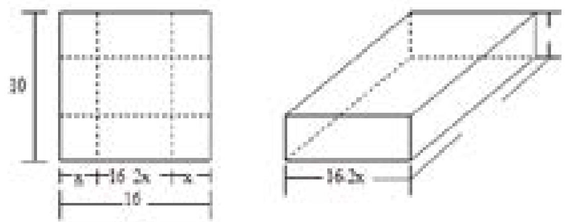
$A''(5) = -2 < 0 \Rightarrow$ es máximo.

Por lo tanto las dimensiones del rectángulo son :

$X = 5$ $Y = 5$

4.- Una caja rectangular sin tapa debe ser construida de la siguiente manera una plancha de espesor de 10 x 10 cm, se lo hará un corte cuadrado en cada esquina como indica en la fig.

y se dobla por las líneas para que la caja encierre el máximo volumen posible.



V = (16 – 2x) (10 – 2x) x

V’ (x)

V(x) = 4x³ – 52x² + 160x

2 3

V’(x) = 12x – 104x + 160

0 = 4 (3x² – 26x + 40)⁻¹²⁰

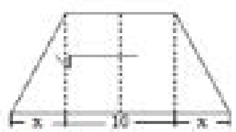
0 = 4 (3x – 20) (3x – 6) / 3

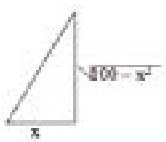
x = 2 ⇒ v = max

v = (12) (6) 2

v = 144uv

- Si tres lados de un trapecio miden cada uno 10cm como se indica en la fig 1 cuenta debe medir el cuarto lado para que el valor del material con que se fabrique sea max.





$A = \frac{B.b}{2}\ h$

$A = \frac{(10 + 2x) + 10}{2}\ \sqrt{100 - x^2}$

$A'(x) = \frac{-4x^2 - 20x + 200}{\sqrt{100 - x^2}}$

$0 = \frac{-4(x^2 + 5x - 50)}{\sqrt{100 - x^2}}\ x \neq \pm 10$

$A(x) = (10 + x)\sqrt{100 - x^2}$

$A(x) = \sqrt{(100 - x^2)(100 + 20x + x^2)}$

$A(x) = \sqrt{10000 - 2000x - 20x^2 - x^4}$

$A'(x) = \frac{2000 - 60x^2 - 4x^3}{(10 + x)\sqrt{100 - x^2}}$

-4	-60	0	2000	
	40	200	-2000	-10
-4	-20	200	0	

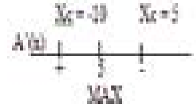
$0 = (x - 10)(x - 5)$

$x = 5$

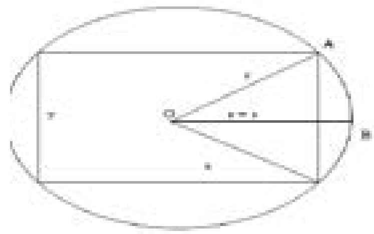
$B = 20$

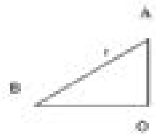
$b = 10$

$h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$



6.- Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio S





A del cuadrado = x . y

Para determinar la relación entre x y consideremos

De la figura $AB = \frac{y}{2}$ $OB = \frac{x}{2}$ $OA = 5$

Por Pitágoras $(OA)^2 = (OB)^2 + (AB)^2 \Rightarrow 25 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$

luego $25 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \Rightarrow 100 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$

⇒ Reemplazando en A = x . y

$A_{(x)} = x\sqrt{100 - x^2}$

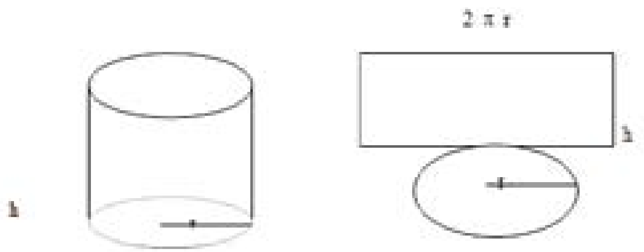
Por lo tanto,

$$x = \sqrt{50} \qquad\qquad y = \sqrt{50}$$

7.-Hallar las dimensiones del depósito cilíndrico sin tapa de 1 m^3 de capacidad, de manera que el costo del material con que se fabrique se reduzca al mínimo.

Traducido al lenguaje matemático, necesitamos una superficie que sea mínima.

Graficando



Superficie = superficie lateral + superficie base.

La función superficie S depende de dos variables r y h . debmos hacer que dependa de una sola variable, para eso tomamos en cuenta el otro dato.

Volumen = $1m^3 = \pi r^2 h$

De donde $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$ ___

Sustituimos en la expresión de la superficie.

$$S = 2\pi r.\frac{1}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{2}{r} + \pi r^2$$

$\Rightarrow \quad S(r) = 2r^{-1} + \pi r^2$

calculamos el mínimo

$$S'(r) = -2r^{-2} + \pi r$$
$$0 = -2r^{-2} + 2\pi r$$
$$0 = \frac{-2}{r^2} + 2\pi r$$
$$0 = \frac{-2 + 2\pi r^3}{r^2}$$
$$2 = 2\pi r^3$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \quad \text{Valor crítico}$$

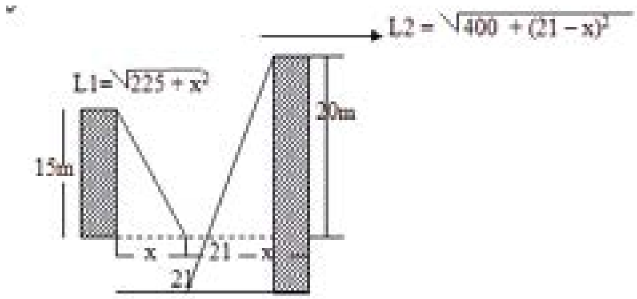
$$S''(r) = 4r^{-3} + 2\pi$$

$$S''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right) = \frac{4}{\frac{1}{4}} + 2\pi = 4 + 2\pi = 6\pi > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$

Por lo tanto las dimensiones so

$$r = \sqrt[3]{1/\pi} \qquad\qquad h = \frac{1}{\left(\pi\left(\sqrt[3]{1/\pi}\right)^2\right)}$$

8.-Dos postes verticales de 15 y 20 m están separados 21 m el extremo superior de cada una, están unido mediante un tirante a una estaca situada en el suelo y en línea recta entre los postes ¿En qué lugar debe colocarse la estaca para que el tirante tenga una longitud total mínima?



$L_T = L1 + L2$

$L_T(x) = \sqrt{225 + x^2} + \sqrt{400 + (21 - x)^2} \rightarrow 400 + 441 - 42x^2 + x^2$

$L_T(x) = \sqrt{225 + x^2} + \sqrt{x^2 - 42x + 841}$

$L'_T(x) = \dfrac{x}{\sqrt{225 + x^2}} - \dfrac{x - 21}{\sqrt{x^2 - 42x + 841}}$

$0 = \dfrac{x}{\sqrt{225 + x^2}} + \dfrac{x - 21}{\sqrt{x^2 - 42x + 841}}$

$\dfrac{x}{\sqrt{225 + x^2}} = \dfrac{21 - x}{\sqrt{x^2 - 42x + 841}}$

$\dfrac{x^2}{225 + x^2} = \dfrac{(21 - x)^2}{x^2 - 42x + 841}$

$x^4 - 42x^3 + 841x^2 = (x^2 - 42x + 441)(225 + x^2)$

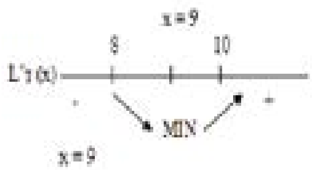
$x^4 - 42x^3 + 841x^2 = x^4 - 42x^3 + 666x^2 - 9450x + 99225$

$175x^2 + 9450x - 99225 = 0$

$x^2 + 54x - 567 = 0$

$(x + 63)(x - 9) = 0$

$x = -63 \quad x = 9$



$L_T = \sqrt{225 + 81} + \sqrt{400 + (21 - 9)^2}$

$L_T \min = 80{,}81 \text{ mL}$//

3.44. Actividades de aprendizaje

- Para un correcto aprendizaje de esta unidad, se debe realizar una lectura cuidadosa de cada uno de los temas tratados en su totalidad.

- Para su auto evaluación es recomendable que vuelva a ejercitarse repitiendo los ejercicios desarrollados

3.45. Actividad de auto evaluación.

- La resolución de los ejercicios resueltos se la debe hacer paso a paso, no mirar el texto, pero pudiendo utilizar el formulario. Una vez finalizado el ejercicio compare el resultado obtenido con el del texto, sino coinciden, repita el ejercicio.

CAPÍTULO IV

LA INTEGRAL

4.1. Integración:

En el cálculo diferencial hemos atendido a calcular las derivadas de una función F´(x) → F(x) cuya operación se denota:

$$\frac{d}{dx}\ F(x)=F'(x),\ (F'(x)=\frac{d}{dx})$$

El problema del cálculo integral de pende de la operación, inversa es decir hallar una función F(x) cuya derivada sea F(x) por lo tanto el cálculo integral es la operación inversa al cálculo diferencial si F(x) es la derivada de F(x) la diferencial de F(x) se representan mediante el símbolo de F'(x) dx.

Por el diferencial de la variable dependiente podremos remplazar.

Ejemplo:

1) $\frac{d}{dx}\ F(x)=x^3$

$dF(x)=3x^2\,dx$

2) $F(x)=\operatorname{sen} x$

$dF(x)=\cos x\,dx$

3) $F(x)=\operatorname{arctg} x$

$dF(x)=\frac{dx}{1+x^2}$

de tal manera podemos del cálculo integral.

La función F(x) que se obtiene se llama una integral de la expresión diferencial dada, el procedimiento para hallar se denomina integración, la operación se indica mediante el signo ∫

∫ F(x) dx = F(x)

Operaciones contrarias

Ejemplos:

1) $F(x)=x^3$, $F'(x)dx=3x^2dx$, $\int 3x\,dx = x^3$

2) $F(x)=x^6$, $F'(x)dx=6x^5dx$, $\int 6x\,dx = x^6$

3) $F(x)=\operatorname{sen} x$, $F'(x)dx=\cos x\,dx$, $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$

4) $F(x)=\operatorname{arctg} x$, $F'(x)dx=\frac{dx}{1+x^2}dx$ $\quad \int \frac{dx}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x$

4.2. Constante de integración

$$d(x^3) = 3x^2dx$$
$$\int = 3x^2dx = x^3$$

$$d(x^3+3) = 3x^2dx$$
$$\int 3x^2dx = x^2+3$$

$$d(x^3-7) = 3x^2dx$$
$$\int 3x^2dx = x^3-7$$

La constante arbitraria ¨C¨ se denomina constante de integración, y es una cantidad independiente de las variables de integración puesto que podemos dar a C cuantos valores que queramos, es decir que las integrales de una F’(x) tiene una infinidad de integraciones que solo difieren de la constante de integración.

$$\int F(x)dx = F(x)+c$$
$$d(x^3-7) = x^2dx$$
$$\int 3x^2dx = x^3-7$$
$$\int 3x^2dx = x^3-c$$

4.3. Fórmula de integrales

1) $\int (du+dv-dw) = \int du + \int dv - \int dw$

2) $\int a\,dx = a\int dv$

3) $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1}+c$

4) $\int \frac{dv}{v} = \ln v + c$

5) $\int a^v dv = \frac{a^v}{\ln a}+c$

6) $\int a^v dv = \frac{a^v}{\ln a}+c$

7) $\int e^v dv = e^v + c$

8) $\int \operatorname{sen} v\,dv = -\cos v + c$

9) $\int \cos v\,dvc = \operatorname{sen} v + c$

4.4. Cambio de variable

$$\int (x-6)^3 = 4x^3dx$$
$$v = x^4dx$$
$$dv = 4x^3dx$$

$$\int v^3dv = \int \frac{v^4}{4}+c$$

$$\left(\frac{x^4-6}{4}\right)^4 + C$$

4.5. Integración por partes

Si u y v son funciones de la misma variable independiente tomamos según la segunda fórmula para la diferenciación de un producto. u dv + v du = d (u v)

$$\int u\,dv = uv - \int u\,dw$$

$$v = x^3\,dx$$

$$dv = 4x^3\,dx$$

4.6. Fórmula de integración por partes

Tal vez no podamos integrar u dv directamente ero esta fórmula hace que su integración dependa de dv y también de du, que pueden ser formulas faciales de integración. Este método de integración por partes es uno de los más usados en el cálculo integral.

Ejercicios:

Hallar la integral de: x ln x

u = ln x dv = x dx

hallar la integral de:

$$\frac{dx}{x} = x\int \ln x = \ln x\,\frac{x^2}{2} - \int \frac{dx}{x}\,x$$

$$\int \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$\frac{x^2 \ln x - x^2}{2} + c$$

1. $\int x^4\,dx$

$= \frac{x^5}{5} + C$

2. $\int \frac{dx}{x^2}$

$= \int x^{-2}\,dx$

$= -x^{-1} + C$

$= -\frac{1}{x} + C$

3. $\int x^{2/3}\,dx$

$= \frac{3x^{5/3}}{5} + C$

6. $\int \frac{2a\,dt}{t^2}\,dt$

$= 2\int t^{-2}\,dt$

$= \frac{2}{t} + C$

a+b+c=0
-a+b-2c=4
-2a=-2

7. $\int \sqrt{ax}\,dx$

$= \int a^{1/2}x^{1/2}\,dx$

$= a^{1/2}\int x^{1/2}\,dx$

$a = 1$
$b = 1$
$c = -2$

$= a^{1/2} \bullet \frac{2x^{3/2}}{3} + C$

$= \frac{2x\sqrt{ax}}{3} + C$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$= \int x^{-1/2}\,dx$

$= 2x^{1/2} + C$

$= 2\sqrt{x} + C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

$= \int x^{-1/3}\,dx$

Verificar las siguientes integraciones

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$

$= \int \frac{1}{2^{1/2}x^{1/2}}\,dx$

$= 2^{-1/2}\int x^{-1/2}\,dx$

$= 2^{-1/2} \bullet 2x^{1/2} + C$

$= \sqrt{2x} + C$

9. $\int \sqrt[3]{3t}\,dt$

$= 3^{1/3}\int t^{1/3}\,dt$

$= \frac{3^{1/3} \bullet t^{4/3}}{4} + C$

$= \frac{(3t)^{4/3}}{4} + C$

10. $\int \left(x^{3/2} - 2x^{2/3} + 5\sqrt{x} - 3\right)dx$

$= \int x^{3/2}\,dx - 2\int x^{2/3}\,dx + 5\int x^{1/2}\,dx - 3\int dx$

$= \frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{6x^{5/3}}{5} + \frac{10x^{3/2}}{3} - 3x + C$

1. $\int x^4\,dx$

$= \frac{x^5}{5} + C$

2. $\int \frac{dx}{x^2}$

$= \int x^{-2}\,dx$

$= -x^{-1} + C$

$= -\frac{1}{x} + C$

3. $\int x^{2/3}\,dx$

$= \frac{3x^{5/3}}{5} + C$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$= \int x^{-1/2}\,dx$

$= 2x^{1/2} + C$

$= 2\sqrt{x} + C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

$= \int x^{-1/3}\,dx$

11. $\int \left(x^{3/2} - 2x^{2/3} + 5\sqrt{x} - 3\right)dx$

$= \int x^{3/2}\,dx - 2\int x^{2/3}\,dx + 5\int x^{1/2}\,dx - 3\int dx$

$= \frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{6x^{5/3}}{5} \ldots - 3x + C$

-2a=-2

$a = 1$
$b = 1$
$c = -2$

1. $\int \frac{(4x-2)dx}{x^3+x^2-2x}$

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{(x-2)}+\frac{c}{(x+1)}$$

$$\begin{aligned}4x-2&=a(x-2)(x+1)+bx(x+1)+cx(x-2)\\&=a(x^2-x-2)+b(x^2+x)+c(x^2-2x)\\&=ax^2-ax-2a+bx^2+bx+cx^2-2cx\\&=x^2(a+b+c)+x(-a+b-2c)-2a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{(4x-2)dx}{x(x-2)(x+1)}&=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{(x-2)}-2\int\frac{dx}{(x+1)}\\&=\ln x+\ln(x-2)-2\ln(x+1)+\ln C \quad \text{R///}\\&=\ln\frac{x^2-2x}{(x+1)^2}+C\end{aligned}$$

2. $\int \frac{(5x^2-3)dx}{x^3-x}$

$$\frac{5x^2-3}{x(x+1)(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{(x+1)}+\frac{c}{(x-1)}$$

a+b+c=5
-b+c=0
-a=-3

$a=3$
$b=1$
$c=1$

$$\begin{aligned}5x^2-3&=a(x+1)(x-1)+bx(x-1)+cx(x+1)\\&=a(x^2-1)+b(x^2-x)+c(x^2+x)\\&=ax^2-a+bx^2-bx+cx^2+cx\\&=x^2(a+b+c)+x(-b+c)-a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{(5x^2-3)dx}{x(x+1)(x-1)}&=3\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{(x+1)}+\int\frac{dx}{(x-1)}\\&=3\ln x+\ln(x+1)+\ln(x-1)+\ln C\\&=\ln x^3(x^2-1)+C\end{aligned}$$

3. $\int \frac{(4x+3)dx}{4x^3+8x^2+3x}$

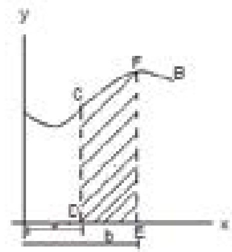
$$\frac{4x+3}{x(2x+3)(2x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{(2x+3)}+\frac{c}{(2x+1)}$$

$$\begin{aligned}4x+3&=a(2x+3)(2x+1)+bx(2x+1)+cx(2x+3)\\&=a(4x^2+8x+3)+b(2x^2+x)+c(2x^2+3x)\\&=4ax^2+8ax+3a+2bx^2+bx+2cx^2+3cx\\&=x^2(4a+2b+2c)+x(8a+b+3c)+3a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{(4x+3)dx}{x(2x+3)(2x+1)}&=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{(2x+3)}-\int\frac{dx}{(2x+1)}\\&=-\frac{1}{2}\ln\frac{(2x+1)(2x+3)}{x^2}+C \quad \text{R///}\end{aligned}$$

4.6. Integral Definida

Para poder entender el teorema elemental del campo integral debemos en primer lugar conocer que es la integración indefinida.



Si la curva AB de la función Y es el lugar geométrico Y=Φ(x) y si u es la medida del área CDEF donde du=Yd(x) donde remplazando en du= Φd(x))(1)

Nota: siendo el diferencial del área entre la curva del eje de las x y segunda ordenada "du" si integramos la primera función obtendremos que

$$\int du=\int\Phi(x)dx \;\; \text{y} \;\; u=\int\Phi(x)dx$$

Si la integral de una derivada es igual a la función original más la constante de integración:

cuando

u=0 x=a

0=f(x)+C 0=f(a)+C

Donde f(x)=-C C=-f(a)

C=- f($\int du = \int \Phi(x)dx$ y $u = \int \Phi(x)dx$

De la segunda expresión

El área CDEF que se pide es el valor de u cuando y=a y b el área será la siguiente

Pasos $\int \Phi(x)dx = f(x) + C,$ $u = f(x) + C_2$

I paso. - $u = f(x) - f(x)$ = $f(x) = -f(a)_{(3)}$

Integrar la expresión o función diferencial dada.

Ii paso. - $\int_a^b Ydy$ **o también** $\int_a^b \Phi(x)dx$

Remplazar la variable en esta integral indefinida en primer lugar por el límite superior después por el inferior y luego restar el segundo resultado del primero.

Ejemplo:

$$\int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21R\ //$$

$$\int_0^{\Pi} senx\,dx = [-\cos x]_0^{\Pi} = -\cos \Pi + \cos 0 = 2R\ //$$

$$\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= \left[\frac{1}{a} arctg \frac{a}{a} - \frac{1}{a} arctg \frac{0}{a}\right]$$

$$= \frac{1}{a} 45 - \frac{1}{a} 0$$

$$= \frac{45}{a} R\ ///$$

Ejercicio 1. -

Hallar el área limitada por la parábola y=x2, en el eje de las x y las ordenadas x=2 y x=4.

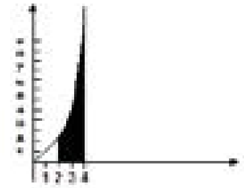
Datos:

$y = x^2$

$x = 2$

$x = 4$

X	Y
2	4
3	9
4	16
0	0



Area= $\int_2^4 x^2 dx$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_2^4$$

$$= \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3}$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{56}{3} u^2 R$$

Ejercicio 2.-

Hallar el área limitada por el círculo en el eje de las x y las ordenadas x=-3 y x=4.

Datos:

$x^2 + y^2 = 25$

$x = -3$

$x = 4$

$y = \sqrt{25 - x^2}$

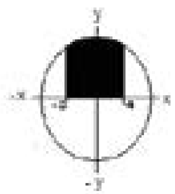
Área= $\int_{-3}^{4} \sqrt{25 - x^2}\,dx$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2} arcsen \frac{x}{5}\right]_{-3}^{4}$$

$$= 6 + \frac{25}{2} arcsen \frac{4}{5} + 6 - \frac{25}{2} arcsen \left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= 31.6R\ //$$

X	Y
-3	4
-2	9
-1	16
0	0
1	



Hallar:

$$\int_0^a (a^2x - x^3)dx = \frac{a^4}{4} = \left[\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a = \left[\frac{a^2a^2}{2} - \frac{a^4}{4}\right]_0^a = \frac{2a^4 - a^4}{4} = \frac{a^4}{4} R //$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = 1 = \int_1^e x^{-1}dx = \left[x^{-1} - x^{-1}\right]_1^e = 1^{-1} - e^{-1} = 1 - 0 = 1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x}} = \sqrt{3} - 1 =$$

$$\left[\frac{dx}{\sqrt{3 - 2x}}\right]_0^1 = arcsen\,\frac{2}{3} + C$$

$$= \sqrt{3} - 1R //$$

BIBLIOGRAFÍA.

- LARA JORGE, ARROBA JORGE. (1998) Análisis Matemático. Edit. Centro de Matemática. Universidad Central. Quito- Ecuador

- GRANVILLE WILLIAM A. (1985) Cálculo Diferencial e Integral. Edit. Limusa.

México 1985

- DEMIDOVICH B y OTROS. (1985) Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.

Ediciones OS Bandeirantes. Sao Paulo – Brasil

- DEMIDOVICH B. (1980) 5.000 Problemas de Análisis Matemático. Edit. Paraninfo

Madrid. Ed. II

- LEITHOLD LOUIS. (1992). El Cálculo con Geometría Analítica. Edit. Mexicana.

México.

- PURCELL EDWIN Y VARBERG DALE. (1993). Cálculo Diferencial e Integral.

Edit. Prentice may. Ed VI.

- ESTEVEZ, BLADIMIR (2015). Trabajo de investigación

LINKOGRAFÍA. –

http://espanol.geocities.com/jefranco_2000mx/matbasicas.htm

http://www.ejerciciosdematematicas.hpg.ig.com.br/cal1/nreales/inecuac/pag1.html

http://www.fc.uaem.mx/LICENCIATURA/TRONCOMUN/EXAMEN/CalDifI1/prueba.html

http://148.216.10.84/DIFERENCIAL/diferencial.htm

CASA EDITORA DEL POLO

ISBN: 978-9942-621-62-7

9 789942 621627